重要問題解説「続：ユークリッド互除法と不定方程式の整数解」’11 6/1

’12 年に高校に入学する生徒が履修する新課程「数学Ａ」の「整数」分野で扱われる「ユークリッド互除法」は，不定方程式の整数解を求める問題に応用できることが知られていますが，その解法・答案は一般の高校生には理解しづらいと思われ，ここを噛み砕いて丁寧に解説することは現場の指導者の使命ともいえます。

教科書学習時にはまずここまでをしっかり指導したいのですが，そのうえで来たるべき演習授業に如何に備える必要もあります。その際，当面は既存の（旧課程時代に出題された）入試問題を使うことになると思うのですが，注意すべきであるのが，**それらの入試問題に付いている解説の多くが，旧課程時代に書かれたものである**ということです。

最近，筆者が何気なくツイッターで流した以下の大学入試問題を，旧友（数学の指導者ではない）がたまたま見つけて解いてくれたというので，出先で話していたのですが，答えの数値は分かるのだが考え方を答案としてどのようにまとめれば良いかとなると難しいので，その友人と別れたあと，複数の過去問集，参考書でどのように書かれているが調べてみました。すると，解答の途中に出てくる不定方程式が筆者が以前に解説したのと同種のもので，**案の定，その部分の解答の書き方も，本によって少しずつ違って**いました。
「これはネタになる！」と直感した筆者は，見つけた解答を紹介し，それぞれの解法が**新課程数学Ａを学ぶ高校生にとって分かりやすいかどうか**という立場から比較検討することにしてみました。

【問題】
3 以上 9999 以下の奇数 a で，a^2-a が 10000 で割り切れるものをすべて求めよ。
［’05 東大］

【解法のポイント】
左辺を $a(a-1)$ と因数分解，10000 を $5^4\times2^4$ と素因数分解して両辺を比較すると，a が奇数であることから，a が $5^4=625$ の倍数，$a-1$ が $2^4=16$ の倍数であるとわかります。その際，a と $a-1$ が互いに素であることに注意しなくてはなりません。また，$a-1$ が 5^4 でも 2^4 でも割り切れるとすると，a が 9999 以下の奇数であることに反します。

このようなことを断ったうえで，$a=625k$（k は奇数）とおき，最終的に $k=1$ の場合しか適するものが無いことが言えれば，条件を満たす a の値が $a=625$ だけであることがわかります。この途中で，答案の書き方にもよりますが方程式 $625k-16l=1$ の整数解を求める処理が出てきて，ユークリッド互除法を知っていればここでつまずくことなく解き進めていくことが出来ますが，知らなくても k の値の小さい方から順に調べていけば何とかなります。実際，冒頭で出てきた筆者の旧友は，コンピュータを用いて 1 つずつ調べ，625 以外の解がないことを確かめていました。

内容的にも問い方も多くの受験生には奇異に映るようですが，**数学的な意味が理解できれば特別な知識は必要なく解ける良問**です。部分点だけでも何とか獲得して欲しいですね。

○「2005 入試問題集」数学Ⅰ・Ⅱ・A・B 理系（数研出版）の解答

$a^2-a=a(a-1)$，「a と $a-1$ は互いに素である」･･･①
$10000=625\times16$，「a は 3 以上の奇数である」･･･②
①，② から，$a=625k$（k は自然数かつ奇数）とおける。
$\underline{a-1=625k-1=624k+k-1=16\times39k+k-1}$ が 16 の倍数となるから，
$k-1=16l$（l は整数）とおける。
このとき　$a=625(16l+1)=10000l+625$
ここで，$3\leqq a\leqq9999$ であるから　$l=0$
よって　$a=625$

･･･率直に言いますが，久々に「怒り」を覚えました。もしも新課程の生徒さんがとかそんな次元ではなく，こんな解答を渡されたらたまったものではないと思います。特に下線部の変形の意図が，極めて読み取りづらくなっています。10000 の素因数分解から出てきた 5^4 と 2^4 を a と $a-1$ に割り振る部分もいつの間にか終わっている印象で，解法の見通しが非常に悪いです。この解答の作成者は，解答の字数をどれだけ減らすかに挑戦したのでしょうか。これでは，つく学力もつかないでしょうし，参照する指導者も困ると思います。

○「2006 受験用 全国大学入試問題正解」数学 国公立大編（旺文社）の解答・注

$a^2-a=a(a-1)$，$10000=5^4\times2^4$ であり，a と $a-1$ は 1 以外の公約数をもたない。
このことを考慮すると，a に対する条件は，$3\leqq a\leqq9999$･･･①，a は 5^4 で割り切れる奇数･･･②，$a-1$ は 2^4 で割り切れる･･･③ となる。
②，③により，$a=5^4\alpha$（α は奇数）･･･④，$a-1=2^4\beta$（β は整数）･･･⑤ とおくことができて，①より　$3\leqq5^4\alpha\leqq9999$　　$\therefore$　$1\leqq\alpha\leqq15$･･･⑥
また，④，⑤から a を消去すると　$625\alpha=16\beta+1$･･･⑦
そこで，⑦と $625=16\cdot39+1$ の差をとると，$625(\alpha-1)=16(\beta-39)$･･･⑧ となり，
$\alpha-1$ は 16 の倍数でなければならず，またそのとき β も存在することが分かる。
よって　$\alpha-1=16n$（筆者注：n は整数）　　$\therefore$　$\alpha=1+16n$
α は⑥を満たす奇数であるから　$\alpha=1$　　$\therefore$　$a=625$
注
⑦の整数解（一般解）を求めるために，⑦の 1 つの解（特殊解）（α，β）＝（1，39）を用いた。しかし，⑦のように係数が大きい場合，解を 1 つ見つけるのも，そう簡単ではない。そこで 625 を 16 で割ると，商は 39，余りが 1 となるので，$625=16\times39+1$
これを用いると，⑦を $(16\times39+1)\alpha=16\beta+1$　　$\therefore$　$\alpha=16(\beta-39\alpha)+1$
のように変形できる。これを見れば，$\alpha=1$ かつ $\beta-39\alpha=0$　　$\therefore$（α，β）＝（1，39）

という特殊解が得られる。

---

⑦から⑧にもっていく部分が若干奇異に映りますが，その部分を一応$\boxed{注}$でフォローしようとしています。$\boxed{注}$で紹介されている解法は，ユークリッド互除法を用いた解法のもとになる，変数を次々に置き換えていく解法に近いものとなっています。
片方の係数をもう一つの係数で割った商と余りを用いて表し，さらに隣の変数とまとめて括弧でくくる操作を行っていますが，そもそもこのやり方が互除法を用いた解法のもとになっているわけですし，括弧でくくることは変数の置き換えにも通じますから，新課程の受験生にも受け入れられやすいはずです。また，勘の良い受験生なら，「これでもまだ絞り切れないときはもう一度同じことをすれば良いのでは？」と気付くと思うのですが，その立場だけで言うと「$\alpha=\cdots$」の形でなく $\alpha-16(\beta-39\alpha)=1$ と書いて欲しかった気もします。
ただ逆に，「もとになっている」方のやり方をすっとばして，いきなり互除法を用いた解法を暗記する（させられる）と，「似ているけれど何か違うことをやっていて，気持ち悪い」という印象を与えるかも知れません。
特にこの解答は，生徒さんに「意味が分かりません」と質問されたときに，過去の指導内容を踏まえて（ただし，そのためにはそこまでの指導をごまかさずにやらなくてはなりませんが$\cdots$）うまく納得させてやれるか，フォローする指導者の資質が問われる（？）解答といえるでしょう。

○「東京大学 数学入試問題 50 年」（聖文新社）の解答・注意

$1000=2^4\cdot5^4$ に注意すると　a^2-a が 1000 で割り切れる

$\iff$　$a(a-1)$ が $2^4\cdot5^4$ で割り切れる

a は奇数で，a と $a-1$ は互いに素だから　$a=5^4\cdot x$，$a-1=2^4\cdot y$（x，y は整数）とおけて，2 式から a を消去すると　$625x-16y=1\cdots$①

ここで，$625=16\cdot39+1$ であるから　①$\iff 625(x-1)-16(y-39)=0$

$\iff 625(x-1)=16(y-39)$

625 と 16 は互いに素だから　$(x,\ y)=(16k+1,\ 625k+39)$（$k$：整数）

$\therefore$　$a=5^4(16k+1)=5^4(2^4k+1)$

$3\leqq a\leqq2^4\cdot5^4-1$ であったので，$k=0$　　$\therefore$　$a=5^4=625$

注意

a と $a-1$ の最大公約数を g（>0）とすると $a=gb$，$a-1=gc$（b，c は整数）とおけて，2 式より a を消去すると　$g(b-c)=1$　　$\therefore$　$g=1$

よって，a と $a-1$ は互いに素となる。

また，①を満たす x，y の 1 組を求めるためによく利用されるのが，周知のようにユークリッドの互除法である。625 を 16 で割って商と余りを求めた理由もそこにある。

---

a と $a-1$ が互いに素であること程度は，通常は「明らか」とするものですが，採点基準にその部分の議論も含められている可能性も考えてか，**注意**で補足説明を加えています。対して，互除法の利用については，説明不足の感は否めません。新課程で学ぶ生徒さんには逆にこれで良いのかも知れませんが，現課程の生徒さん（および新課程を知らない指導者）にとっては「周知」ではなく，しかもどこで互除法を使ったのかも読み取りづらく感じます。指導者なら当然この程度のことは自分で調べるべきですが，キーワードだけ挙げておいて「これ以上詳しく知りたかったら自分で」で止められると，正直言って気分が悪いです。

○「東大の理系数学 25 ヵ年」（教学社）の解法・注

一般に自然数 n に対して n と $n-1$ は互いに素である（$n=1$，2 に対しては明らか。$n \geqq 3$ のとき，もしも n と $n-1$ が互いに素ではないとすると，$n=ps$ かつ $n-1=pt$ となる素数 p と整数 s，t があり，差をとると $1=p(s-t)$ となり，1 が p で割り切れることになる。これは矛盾）。

このことと a が奇数であることから，$a^2-a=a(a-1)$ が $10000=2^4\cdot 5^4$ で割り切れるとすると，a は 5^4 で，$a-1$ は 2^4 で割り切れなければならない。よって $a=5^4b\cdots$①，$a-1=2^4c\cdots$② となる自然数 b，c が存在する。

①，②より　$5^4b-2^4c=1$　すなわち　$625b-16c=1\cdots$③

また　$625\cdot 1-16\cdot 39=1\cdots$④　　③，④より　$625(b-1)=16(c-39)$

625 と 16 は互いに素なので，$b-1=16d$ となる整数 d が存在する。

したがって，①より　$a=5^4(16d+1)=1000d+625$　$3 \leqq a \leqq 9999$ より　$d=0$，$a=625$

このとき $a(a-1)=625\cdot 624=5^4\cdot 2^4\cdot 39$ なので，確かに a^2-a は $10000=2^4\cdot 5^4$ で割り切れる。よって　$a=625$

注

a と $a-1$ に $10000=2^4\cdot 5^4$ の因数を振り分けることが第 1 のポイントである。その際に，a と $a-1$ は互いに素であることが重要なはたらきをする。

次いで不定方程式の整数解を求める作業に移る。1 つの解（特殊解）を利用して一般解を求める。これは典型的な手法である。ここで「整数 a，b が互いに素のとき，ac が b で割り切れるならば c が b で割り切れる」という整数の理論における基本的な定理を用いていることに注意してほしい。

整数の問題は理由づけに細心の注意が必要なので論理的な思考を養うことが大切である。

答案中では，a と $a-1$ が互いに素である理由を，背理法を用いて示しており，好感を覚えます。が，注では③の 1 つの解（特殊解）を求める処理に関しては何もコメントされていないのが残念です。「　」内に述べられているのは，$625(b-1)=16(c-39)$ から $b-1$ が 16 で割り切れるとしてよい根拠であり，こちらはそれなりに詳しく書かれています。

○「東大数学で 1 点でも多く取る方法」理系編（東京出版）の解答・注意

$a(a-1)$ が 10000 で割り切れるから，$a(a-1)=$（10000 の倍数）と書ける。

　$a(a-1)=$（$2^4\cdot 5^4$ の倍数）

a は奇数だから $a-1$ は偶数である。よって $a-1$ は 2^4 の倍数である。また，a と $a-1$ は互いに素だから，両方がともに 5 の倍数になることはないから一方が 5^4 の倍数である。ただし $a-1$ が 2^4 の倍数で，かつ，5^4 の倍数であるとすると $a-1$ が

$2^4 \cdot 5^4 = 10000$ の倍数になり，a が 9999 以下であることに反する。

よって a が 5^4 の奇数倍，$a-1$ が 2^4 の倍数である。

p，q を正の整数（p は奇数）として $a=625p$，$a-1=16q \cdots$① とおける。ただし，

$3 \leqq a \leqq 9999$ より　$3 \leqq 625p \leqq 9999$　　$\therefore$　$1 \leqq p \leqq 15$

①の 2 式から a を消去して，$625p-1=16q$ となる。q について解いて，

$$q=\frac{625p-1}{16}=\frac{(39 \cdot 16+1)p-1}{16}=39p+\frac{p-1}{16}$$

$1 \leqq p \leqq 15$ では，q が整数になる p は，$p=1$ だけである。　$a=625$

注　1°（略）

2°【調べる】文字が苦手なら苦手でもよいから，少しでも確実に得点していく姿勢がほしいものです。

a が 625 の奇数倍で $3 \leqq a \leqq 9999$ のとき，a は 625 の 1 倍，3 倍，$\cdots$ であり

625，1875，3125，4375，5625，6875，8125，9375

のいずれかである。$a-1$ は

624，1874，3124，4374，5624，6874，8124，9374

のいずれかになる。このうちで 16 の倍数になるものがどれかが問題であるが，私（筆者注：著者の安田亨先生）は割り算が苦手なので（年をとると，文字の計算なら少しはできるけど，具体的な数の四則計算はさっぱりできない），とりあえず 4 の倍数にはならなければならない。正の整数が 4 の倍数になるのは下 2 桁が 4 の倍数になるときだから，下 2 桁が 74 になるものは不適である。下 2 桁が 24 のものを 4 で割ると，順に 156，781，1406，2031 となる。これらがさらに 4 の倍数になるのは 156 だけだから，最初の 625 だけが適する。

文章量が多い解答ですが，自分の考えを如何に伝えるかは数学の大事な要素ですし，この本で学ぶぐらいの国語力の持ち主であれば，読みこなせるでしょう。$a-1$ を 10000 の倍数にすると矛盾するのですが，この解答ではその点にも言及しています。

不定方程式の整数解を求める部分は，整数＝分数の形を作り出し，さらに分数の部分を整数と分数に分ける手法を使っています（別の本では「クッタカの方法」として紹介されていました）。1 つの解が明らかに分かるほど簡単な係数でもないが，わざわざユークリッドの互除法のような「大道具」を持ち出すまでもないと判断したときは，この方法も役に立ちます。知っておくとよいでしょう。ただし，新課程で学ぶ生徒さんは，不定方程式の整数解というとイコールユークリッドの互除法と判断するようになるかも知れず，そう教え込んでしまった後ににこういった解答を見せると混乱を招くかも知れません。「16 ぶんの」の上の部分が，$p-1$ のような簡単な式にならないと，このやり方のうまみがないこと，それでも処理できない場合は互除法によることを，補足しない厳しいでしょう。

後半の，片っ端から割り算していく話は，冒頭の知人の話にも通じるものがありますが，この解答が収録されている本のタイトル「1 点でも多く取る方法」にも沿った内容です。

目新しい問題に出会ったとき，鮮やかに解ければそれに越したことはありませんが，そう

でないときも決して諦めずに，どんな形でも良いからとにかくもがいて答えに近づくことの大切さを，受験生の皆さんにも伝えたいものです。本資料の本筋である「互除法」からは離れますが，「新課程の受験生に分かりやすい内容」という大局を見ると，こういった話題の重要性も見えてきます。

○「入試数学の思考法」（駿台文庫）の解答・解説

※ 解答の前に「思考の伝達　互いに素」というコーナーがあり，a と $a-1$ が互いに素であることの背理法を用いた証明が囲みに書かれており，他に指針を述べた文章がある

---

a^2-a が 10000 で割り切れるので，正の整数 k を用いると

$$a^2-a=10000k \qquad \therefore \quad a(a-1)=2^4\cdot 5^4\cdot k$$

ここで，a と $a-1$ は互いに素であり，a は奇数であることから　　← a，$a-1$ は，互いに素

$a=5^4x$，$b=2^4y$（x，y は整数）とおける。

したがって，$5^4x-1=2^4y \qquad \therefore \quad 625x-16y=1 \quad \cdots$①

$625\cdot 1-16\cdot 39=1\cdots$② となるので，　　← この不定方程式は，解を1つ見つけます（アドバイス参照）。

①−②より

$$625(x-1)-16(y-39)=0 \qquad \therefore \quad 625(x-1)=16(y-39)$$

625 と 16 は互いに素であるので，$x-1=16n$，$y-39=625n$（m，n は整数）とおける。したがって，$a=625x=625(16n+1)=10000n+625$ より，3 以上 9999 以下の奇数 a は，$a=625$ のみ。

$\boxed{\text{別解}}$　a は，3 以上の奇数であるので，$a=2n+1$ として解いてもよいでしょう。

（$625x-16y=1$ を導くまで）$a=2n+1$（$n=1$，2，3，$\cdots$）とすると，

$$a^2-a=(2n+1)^2-(2n+1)=(2n+1)2n=2^4\cdot 5^4k$$

$2n+1$ は奇数なので，$2n+1=5^4x$，$n=2^3y$（x，y は整数）とおける。

$n=8y$ より，$16y+1=625x \qquad \therefore \quad 625x-16y=1$

※ このあと「アドバイス　不定方程式」として，②の形の不定方程式は，1つ解を見つければ辺々引いた形からすべての解の一般式が出てくること，その解を点の座標とすると座標平面上に規則的に並ぶことに触れられているが，肝心の「係数の絶対値が大きいときに，1つめの解を見つける方法」に関しては具体的に書かれていない。

この本の書き方は，（全体としては良いことを端々で言っており，「アドバイス」の部分も基本的には好感を覚えるのですが）何となく不安が残ります。しかも，1つの解を見つける部分が「解を見つけた」などの表現を使わず，求まった解を方程式にいきなり代入したものが書かれているので，特に新課程の受験生の皆さんは読み取るのに苦労するのではと思われます。なまじ残りの部分が丁寧に書かれているだけに「そもそもこんな式をどうやって見つけるのか？」という疑問を持ったときに，「互いに素」など関係ない部分を何度も読み返す羽目になりそうでもあります。

重要問題解説「続：ユークリッド互除法と不定方程式の整数解」’11 6/1

○「ハイレベル 精選問題演習」（旺文社）の「参考」
※ 解答部分は「入試数学の思考法」とほぼ同じなので省略。（別解部分はない）

---

④（筆者注：$625p-16q=1$）を満たす整数の組（p，q）すべてを求めるには，④の一つの解，例えば⑤に示した解（p，q）＝（1，39）を捜して，④を⑥（筆者注：$625(p-1)=16(q-39)$））のように変形するとよい。それでは，（p，q）＝（1，39）はどうやって見つけるのだろうか。
④における係数 625，16 の大きい方 625 を小さい方 16 で割ると $625=16\cdot 39+1$ となるから，④は

$$(16\cdot 39+1)p-16p=1 \qquad \therefore \quad 16(39p-q)+p=1 \quad \cdots ④'$$

と書き直せる。④を満たす整数の組の 1 つとしてたとえば，$39p-q=0$，$p=1$
$\therefore \quad p=1$，$q=39$　が得られることになる。

こちらも「全国大学入試問題正解」（旺文社）に似ていますが，恐らく同じ出版社なので参考にされたのでしょう。互除法という用語を前面に押し出してはいませんが，明解で，さらに「何故そもそもこんなことをするのか」といった部分も前フリできちんと触れられており，好感が持てます。

【参考】「数研通信」特別号に掲載された解法（注：問題は「方程式 $37x+33y=1$ の整数解をすべて求めよ」で，式番号は (21) からになっていたため筆者でふり直しました）

$37x+33y=1$ $\cdots$①

$37\cdot1+33\cdot0=37$ $\cdots$②

$37\cdot0+33\cdot1=33$ $\cdots$③

とおいて，②−③を計算すると　$37\cdot1+33\cdot(-1)=4$ $\cdots$④

③−8×④ より　$37\cdot(-8)+33\cdot9=1$ $\cdots$⑤

①−⑤より　$37\cdot(x+8)+33\cdot(y-9)=0$　よって　$37\cdot(x+8)=-33\cdot(y-9)$

37 と 33 は互いに素であるから，$x+8=33k$，$y-9=-37k$ となる整数 k がある。よって，①のすべての整数解は　$x=33k-8$，$y=-37k+9$（k は整数）

ポイントが分からないと，全体として何をやっているのかよく分からない式変形ですが，「①を満たす式がすぐには見つからないので，使えそうな式を幾つか並べてそこからスタートしよう」という発想は，数学を専門にしていると自然なものと映るのでしょうか。出来れば筆者もそうなりたいところですが，これは，少なくとも新課程の受験生用に市販の学参にもって来られる解法とは言えないと思います。また，⑤を導くことで①の解を 1 つ見つけていることになるといった，意味合いの説明が（受験生用の解答ではないので）まったくありませんが，もしかすると，ふた昔ぐらい前までの，著者名に大学教授の名前が入っているような参考書は，こういった原稿をそのまま載せて出していて，それで当時受験生の筆者などにとっては使える代物でなかったのかと思います。
ともかく，互除法を知っていれば，それに関係する部分をすべて右辺に移項し，1 になるまで計算しつつ，左辺の 37，33 の部分は崩さず，「流れに任せて」計算していることが一応読み取れますが，いっそ，$37=a$，$33=b$ と逆に文字に直した方が，この解答に関しては全体の見通しが良くなる気がします。

重要問題解説「続：ユークリッド互除法と不定方程式の整数解」’11 6/1

【参考】「チャレンジ！整数の問題199」（日本評論社）の「クッタカの方法」の紹介
（注：問題は「方程式 $7x+5y=1$ を満たす整数 x，y をすべて求めよ」）

（前略）歴史的に古く，初めて解き方を見つけたのは，6 世紀インドのアーリャバータである。7 世紀に入って，同じインドのブラフマグプタが，それをクッタカの方法として確立した。一方（略）互除法を使う解法があり，これは 17 世紀から 18 世紀にかけてヨーロッパで確立された。

$7x+5y=1$ より　$y=\dfrac{1-7x}{5}=-x+\dfrac{1-2x}{5}$　$\cdots$①

y は整数であるから①において $1-2x$ は 5 の倍数でなければならない。そこで，
$1-2x=5t$（t は整数）とおく。これを x について解くと

$$x=\frac{1-5t}{2}=-2t+\frac{1-t}{2}\quad\cdots②$$

x が整数であるから②において $1-t$ は 2 の倍数である。そこで，$1-t=2s$（s は整数）とおく。　$\therefore$　$t=1-2s$　$\cdots$③

③を②に代入すると　$x=-2(1-2s)+\dfrac{2s}{2}=-2+5s$

これを①に代入して　$y=-(-2+5s)+\dfrac{1-2(-2+5s)}{5}=3-7s$

したがって $7x+5y=1$ のの解は，s を任意の整数としたとき以下のようになる。

$$x=-2+5s\ ,\quad y=3-7s$$

ポイントとなるのは「左辺が整数，右辺が分数の形で表されていたら，右辺が約分できなくてはならない」という論理で，これは現在の大学入試でも頻出の事項ですが，この方法の目新しい（筆者から見れば「天才的！？」な）ところは，右辺をさらに整数と分数に分け，別の簡単な式に帰着させ，さらにそれを繰り返すところにあります。
しかしながら，係数的にも大したことのない方程式を解く解答のわりには，文字をたくさん使いますし，答案としても長くなります。互除法を用いた解法も知っている状態で，なおかつこの解法を試験場で選択するのがどんな時かと考えると，「係数の絶対値はそれほど大きくないが，1 つの解が簡単には見つかりそうにない」という，かなり限られた状況になりそうです。もちろん，指導者であれば，こういう解答（の書き方）があることは知っておいた方が良いと思いますが $\cdots$。