「ねえ、今日から算数パズルやらない？」番外編　11/03/21 作成

※ 中学の「正負の数」「絶対値」，高校の「順列・組合せ」の知識を前提とします

　現在不定期にてお送りしている当メルマガ「ねえ，今日から算数パズルやらない？」ですが，あのようなものを書いているおかげか，筆者は日々の授業の中でも，何か良いネタはないかと常にアンテナを張るようになりました。すると・・・なんて大したものでもないのですけれど（苦笑）中学や高校で学ぶ数学の問題の中にも，方程式・不等式や微分積分とかいった上の学年で習う事項や公式を使うという意味での難しさだけでなく，「物事を整理してきちんと考えること」をメインにした問題が意外と多いことに気づきます。

　そこで下の問題になるわけですが，これは熊本大の問題をとあるサイトでたまたま目にし，自身の担当授業の中でも紹介したものです。その際，ほどよい難易度になるように元の問題からは改めました（改，というのはそういうことです）。元の問題は「＝」のところが「≦」になっていて，右辺の方も 6 でなく一般の自然数 n の場合を考えて n の式で表せという問題だったんですけど，こうしてしまうとガチガチ高校内容の問題になってしまいます（数列の和の公式等が必要になりますし，実際，高校生でもかなり優秀な人でないと歯が立ちません）。そこで，中学の知識は前提とするものの，それ以外は場合の数の公式さえ知っていれば解けるように出来ないかと考えたのが・・・この問題です♪

【問題】上級

　等式 $|x|+|y|+|z|=6$ を満たす整数 x，y，z の組は何とおりありますか。

［熊本大：改］

【注意】例えば（x，y，z）＝（1，3，−2）は等式を満たします。

また（x，y，z）＝（1，3　，−2）と（3，−2，1）などもすべて区別して数えます。

【補足＆解説】

　さて，解説に行く前に「重複組合せ」・・・いわゆる○と｜の並べ方の総数を与える公式について簡単に紹介しておきます。この問題では，まず x，y，z の代わりに $X=|x|$，$Y=|y|$，$Z=|z|$ について考えるのですが（ぶっちゃけ符号は後回しにして「数字の部分」だけ先に考えるということです），$X+Y+Z=6$ となる負でない整数 X，Y，Z の組の数は，○を 6 個と｜を 2 個を並べるとその並べ方に 1 対 1 に対応して決まることが知られています。

○｜○○○｜○○

$X=1$　$Y=3$　$Z=2$

これは，○と｜合計 8 個のうち，どの 2 箇所を｜にするかの組合せで求まりますから，

$$ {}_{6+2}C_2=\frac{8\times7}{2\times1}=28 \text{（通り）}$$

となります。・・・ただし，まだ符号を考えていませんから，これはそのままでは答えになりませんね。もう少し・・・いや，かなり（？）しっかり考えないと，この問題は解けないようになっています。

「ねえ、今日から算数パズルやらない？」番外編　　11/03/21 作成

ここまで言うと，分かったという人もいるでしょう。**「そうか，上の 28 通りの 1 つ 1 つに対して，符号（プラスとマイナス）の付け方が $2\times2\times2=8$（通り）ずつあるから，答えは $28\times8=224$（通り）だな？」**なるほど・・・でも，違います！！

なぜ違うのでしょうか？・・・そう聞き返すとピンと来る方も多いと思うのですが，そう「0」ですね。0 は正の数でも負の数でもありませんから，1 や 2 と違ってプラスとマイナスを付けて 2 つの数にすることが出来ません。そこで，X，Y，Z の中に 0 がいくつ含まれるかで分けて考えてみます。

【解答】

x，y，z の絶対値をそれぞれ X，Y，Z とし，符号の付け方に注目する。

ⅰ）0 が 2 つ含まれるとき　（X，Y，Z）＝（6，0，0），（0，6，0），（0，0，6）の 3 通りで，このそれぞれと（x，y，z）の対応を考える場合に符号の付け方は 2 通りずつ考えられるから，（x，y，z）の組は　$3\times2=6$（通り）

ⅱ）0 が 1 つ含まれるとき　まず X，Y，Z の順番を区別せず組合せだけに注目すると，（0，1，5）・・・①，（0，2，4）・・・②，（0，3，3）・・・③ の 3 つのパターンがあるが，順番を区別すると，実際の組（X，Y，Z）は①，②に対しては $3!=6$（通り）ずつ，③は同じ数字が 2 つあるから（0，3，3），（3，0，3），（3，3，0）の 3 通りずつある。

解答の途中ですみませんが，ここ「注意！」ですよね。符号の付け方のところが最もややこしいので，そこで分けて大きく区切ろうと考えたわけですが，この問題はそれ以外にも注意すべき点が隠れていました。・・・考えてみれば，つくづく意地悪な問題ですね。こんな問題を作る人って，一体どういう脳の構造してるんでしょうね？（苦笑）

【解答の続き】

それぞれに対して，符号の付け方は $2\times2=4$（通り）ずつあるから，このときの（x，y，z）は　$(6+6+3)\times4=60$（通り）

ⅲ）0 が含まれないとき　X，Y，Z はすべて 1 以上であるから，それぞれから 1 を引いたものを X'，Y'，Z' とすると，$X'+Y'+Z'=3$ となるから，これを満たす組（X'，Y'，Z'）は○ 3 個と｜2 個の並べ方を考えて　${}_{3+2}C_2=\dfrac{5\times4}{2\times1}=10$（通り）

○｜｜○○
$X'=1$　$Y'=0$　$Z'=2$

それぞれに対して，符号の付け方は $2\times2\times2=8$（通り）ずつあるから，このときの（x，y，z）は　$10\times8=80$（通り）

以上より，与えられた方程式を満たす x，y，z の組は　$6+60+80=146$（通り）

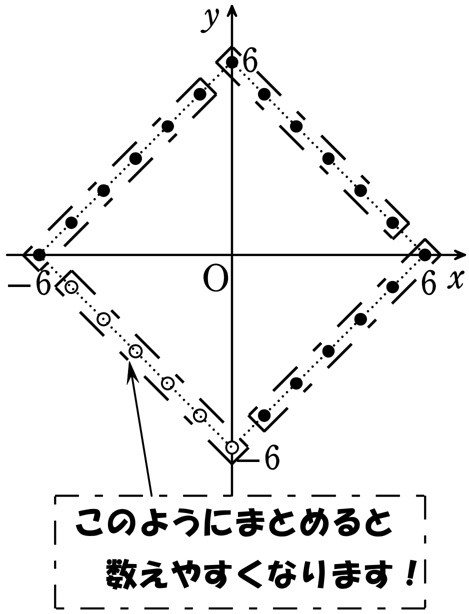
「ねえ、今日から算数パズルやらない？」番外編

11/03/21 作成

一応これを模範解答としておきますが，この問題は，「場合の数」の公式をただ知っているだけではダメで，それらの意味を理解し，適切に使いこなせるようにならないと解けないようになっています！！

・・・が，これだけでは単にややこしいだけの問題で終わってしまい，後味がよくありませんね。ここまで読むだけで疲れ果ててしまったという皆さんも多いでしょう（あ，だからそうだろうなと思って一応『番外編』にしたんですけど・・・）。そこで，まったく別の解き方も実は用意しています。せっかくここまで来たのですから，ぜひお付き合いください。理解しようとしなくても，単に「こんな考え方もあるのか」と感じていただくだけで結構です。逆に，もっとも良い解き方が見つかるかも知れません。考えてみて下さい♪

【別解】



z を固定し，（x，y）を座標平面上の点の座標と考える。例えば $z=0$ のとき，条件を満たすのは

（x，y）＝（6，0），（5，1），（4，2），
・・・，（0，6），（-1，5），・・・

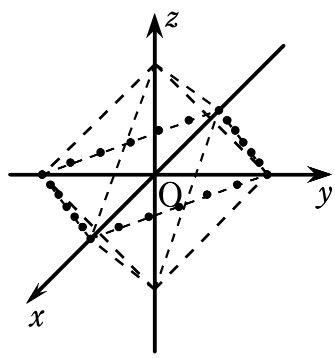
で，これらを座標平面上に並べると右図のようになることから，x，y の組は　$6\times4=24$（通り）

同様にして，

$z=1$，-1 のときはそれぞれ 20 通り
$z=2$，-2 のときはそれぞれ 16 通り
$z=3$，-3 のときはそれぞれ 12 通り
$z=4$，-4 のときはそれぞれ 8 通り
$z=5$，-5 のときはそれぞれ 4 通り
$z=6$，-6 のときは（x，y）＝（0，0）のみ 1 通り

が見つかるから，合計すると　$24+(20+16+12+8+4+1)\times2=146$（通り）

【参考】



上では，点の集まりという考え方を理解していただくために z を固定して x と y だけを変化させましたが，本当は z まで含めて全部変化させても良いわけです。詳しくは「空間座標」として学ぶことになりますが，右の図のように軸を 3 本にすると，$|x|+|y|+|z|=6$ を満たす点全体の集まりは，空間内で正八面体となり，146 個の点はすべてその辺と面の上に並びます。

ここまで理解する必要はありませんが，座標は数の集まりを点の集まりとしてビジュアルにとらえるための道具になることは知っておいて欲しいです。