付録：新課程数学Ａ「不定方程式の整数解」重要例題集　　　’12/01/17

1 ［基本形］

x，y を整数とする。方程式 $5x+3y=1$ の解をすべて求めよ。

略解：

解の 1 つは $x=2$，$y=-3$ より　$5\cdot2-3\cdot3=1$

与方程式と辺々引いて　$5(x-2)+3(y+3)=0$　　すなわち　$5(x-2)=-3(y+3)$

5 と 3 は互いに素であるから，k を整数として $x-2=3k$，$y+3=-5k$ と表せる。

したがって，解は　$x=3k+2$，$y=-5k-3$（k は整数）

2 ［互除法］

次の問いに答えよ。

(1)　等式 $31x+22y=1$ を満たす整数 x，y の組を 1 つ求めよ。＜1つ＞

(2)　等式 $31x+22y=1$ を満たす整数 x，y の組をすべて求めよ。＜すべて＞

(3)　等式 $31x+22y=3$ を満たす整数 x，y の組を 1 つ求めよ。　※(1) の結果利用

略解：

(1)　31 と 22 に互除法の計算を行うと，次のようになる。

$$31=22\cdot1+9 \iff 9=31-22\cdot1 \quad \cdots①$$
$$22=9\cdot2+4 \iff 4=22-9\cdot2 \quad \cdots②$$
$$9=4\cdot2+1 \iff 1=9-4\cdot2 \quad \cdots③$$

よって　$1=9-4\cdot2$　　←③を利用

$=9-(22-9\cdot2)\cdot2$　　←②を利用

$=9\cdot5+22\cdot(-2)$　　←9，22 について整理

$=(31-22\cdot1)\cdot5+22\cdot(-2)$　　←①を利用

$=31\cdot5+22\cdot(-7)$　　←さらに 31，22 について整理

すなわち　$31\cdot5+22\cdot(-7)=1$　$\cdots④$

よって，求める整数 x，y の組の 1 つは　$x=5$，$y=-7$

(2)　与方程式と④とを辺々引くと　$31(x-5)+22(y+7)=0$

すなわち　$31(x-5)=-22(y+7)$　$\cdots⑤$

31 と 22 は互いに素であるから，$x-5$ は 22 の倍数である。

よって，k を整数として，$x-5=22k$ と表される。

これを⑤に代入して　$31\cdot22k=-22(y+7)$　　すなわち　$y+7=-31k$

したがって，求める整数解は　$x=22k+5$，$y=-31k-7$（k は整数）

(3)　④の両辺に 3 をかけると　$31\cdot(3\cdot5)+22\cdot\{3\cdot(-7)\}=3$

すなわち　$31\cdot15+22\cdot(-21)=3$

よって，求める整数 x，y の組の 1 つは　$x=15$，$y=-21$

$\boxed{3}$ ［基本形の応用］

(1)　6 で割ると 1 余り，11 で割ると 5 余る自然数のうち，3 桁で最小のものを求めよ。
＜剰余＞

(2)　3 で割ると 1 余り，5 で割ると 4 余り，7 で割ると 2 余る最小の自然数を求めよ。
＜剰余難＞

(3)　50 円切手 x 枚と 80 円切手 y 枚を使い，郵送料 740 円をちょうど払う方法をすべて求めよ。＜文章題＞

略解：

(1)　求める自然数を n とすると，n は x，y を整数として，次のように表される。

$n=6x+1$，$n=11y+5$

よって　$6x+1=11y+5$　　すなわち　$6x-11y=4$　… ①

①の右辺を 1 とした方程式 $6x-11y=1$ について，$x=2$，$y=1$ はその整数解の 1 つであるから　$6\cdot2-11\cdot1=1$

両辺に 4 をかけて　$6\cdot4-11\cdot4=4$

①－②から　$6(x-8)-11(y-4)=0$　　すなわち　$6(x-8)=11(y-4)$

6 と 11 は互いに素であるから，k を整数として $x-8=11k$ と表される。

ゆえに　$x=11k+8$　　したがって　$n=6(11k+8)+1=66k+49$

$66k+49$ が 3 桁で最小となるのは，$k=1$ のときで　$n=66\cdot1+49=115$

(2)　求める自然数を n とすると，x，y，z を整数として，次のように表される。

$n=3x+1$ … ①，$n=5y+4$ … ②，$n=7z+2$ … ③

①，②より　$3x+1=5y+4$　　すなわち　$3x-5y=3$　… ④

④の 1 つの解は $x=1$，$y=0$ であるから　$3\cdot1-5\cdot0=3$

④と辺々引くと　$3(x-1)-5y=0$　　すなわち　$3(x-1)=5y$

3 と 5 は互いに素であるから，k を整数として $y=3k$ と表される。

②に代入すると　$n=5\cdot3k+4=15k+4$　… ⑤

③，⑤より　$7z+2=15k+4$　　すなわち　$7z-15k=2$　… ⑥

⑥の右辺を 1 とした方程式 $7z-15k=1$ について，$z=-2$，$k=-1$ は解の 1 つであるから　$7\cdot(-2)-15\cdot(-1)=1$　　両辺に 2 をかけて　$7\cdot(-4)-15\cdot(-2)=2$

⑥と辺々引くと　$7(z+2)-15(k+1)=0$　　すなわち　$7(z+2)=15(k+1)$

7 と 15 は互いに素であるから，k' を整数として $k+1=7k'$ と表される。

よって　$k=7k'-1$　　⑤に代入すると　$n=15(7k'-1)+4=105k'-11$

n が最小の自然数となるのは $k'=1$ のときで　$n=105-11=93$

参考　(2) は古来日本の数学の有名問題で「百五減算」と呼ばれている。

$\boxed{4}$ ［因数分解］

(1)　方程式 $xy+3x+y=2$ の整数解を求めよ。
(2)　$\sqrt{n^2+15}$ が自然数となるような自然数 n をすべて求めよ。＜平方根＞
(3)　等式 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{2}$ を満たす自然数 x，y の組をすべて求めよ。＜分母払＞

略解：

(1)　与方程式の左辺は　$x(y+3)+y+3-3=(x+1)(y+3)-3$
よって，与方程式は　$(x+1)(y+3)-3=2$　　すなわち　$(x+1)(y+3)=5$
$(x+1,\ y+3)=(1,\ 5),\ (5,\ 1),\ (-1,\ -5),\ (-5,\ -1)$

(2)　$\sqrt{n^2+15}=m$（m は自然数）とすると，$n^2+15=m^2$ より　$(m+n)(m-n)=15$
題意より，m は n より大きい自然数であるから，$m+n$ は $m-n$ はともに自然数で，
$m+n>m-n$ を満たすことに注意すると　$(m+n,\ m-n)=(15,\ 1),\ (5,\ 3)$
これらより n を求めると　$n=1,\ 7$
※ $m+n$，$m-n$ の組合せが多いときは，偶奇が一致することを利用して条件を絞る。

(3)　分母を払うと　$2y+2x=xy$　　すなわち　$xy-2x-2y=0$　※以下 (1) と同様

$\boxed{5}$ ［分数の和］

x，y，z を $x\leqq y\leqq z$ である自然数とするとき，$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=1$ を満たす自然数 x，y，z の組を求めよ。［類　鳥取大］
＜類題＞　$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}<1$ を満たすとき，$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}$ の最大値を与える x，y，z の値

略解：

条件より $\dfrac{1}{x}\geqq\dfrac{1}{y}\geqq\dfrac{1}{z}$ が成り立つから　$1=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\leqq\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x}=\dfrac{3}{x}$

$x>0$ に注意して分母を払うと $x\leqq 3$ が得られ，かつ明らかに $x\geqq 2$ であるから　$x=2,\ 3$

・$x=2$ のとき　$\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{2}$ が成り立つ。$2\leqq y\leqq z$ に注意して同様に調べると
（または分母を払って因数分解）　$(y,\ z)=(3,\ 6),\ (4,\ 4)$

・$x=3$ のとき　$\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{3}$ が成り立つ。$3\leqq y\leqq z$ に注意して同様に調べると
$(y,\ z)=(3,\ 3)$

以上より　$(x,\ y,\ z)=(2,\ 3,\ 6),\ (2,\ 4,\ 4),\ (3,\ 3,\ 3)$
※＜発展＞の答えは $x=2$，$y=3$，$z=7$

6 ［その他・発展］

(1)　a，b，c，d を $a \leqq b \leqq c \leqq d$ である自然数とするとき，等式 $a+b+c+d=abcd$ を満たす a，b，c，d の組を求めよ。

(2)　等式 $(4m+2n-1)^2+12n^2=49$ を満たす整数 m，n の組を求めよ。＜２乗の和＞

(3)　3 以上 9999 以下の奇数 a で，a^2-a が 10000 で割り切れるものをすべて求めよ。

［東京大］

(4)　$a^3-b^3=217$ を満たす整数 a，b の組（a，b）をすべて求めよ。［京都大］

解法のポイント：

(1)　$abcd=a+b+c+d \leqq d+d+d+d=4d$ より，辺々 d（>0）で割ると　$abc \leqq 4$

これより $abc=1$，2，3 の可能性しかない。

・$abc=1$ のとき　$a=b=c=1$　　このとき $3+d=d$ より不適。

・$abc=2$ のとき　$a=b=1$，$c=2$　　このとき　$4+d=2d$ より　$d=4$

・$abc=3$ のとき　$a=b=1$，$c=3$　　このとき　$5+d=3d$ より不適。

以上より，求める自然数の組は　（a，b，c，d）＝（1，1，2，4）

(2)　$(4m+2n-1)^2=49-12n^2$ と変形し，左辺の実数条件より $49-12n^2 \geqq 0$ から n の範囲を絞り込むと　$n=0$，± 1，± 2

展開して整理し，一方の文字に関する 2 次方程式とみて判別式から条件を絞ってもよい。

(3)　$a(a-1)$ と因数分解すると $a-1$ は偶数，a は奇数であり，これらは互いに素である。

さらに，$a \leqq 9999$ と $10000=2^4 \cdot 5^4$ を考慮すれば　$a=625k$，$a-1=16l$（k，l は整数）

よって　$625k-1=16l$　　すなわち　$625k-16l=1$　…（※）

（※）の解のうち，条件を満たすのは $k=1$，$l=39$ のみであるから　$a=625$

参考（※）は，新課程で学んだ受験生はユークリッドの互除法で解くと思われるが，現課程の参考書では扱えないので，$k+16(39k+l)=1$ と変形して $39k+l=l'$ と置き換えた方程式 $k+16l'=1$ から特殊解 $k=1$，$l'=0$ を導くのが従来的な答案の書き方。

(4)　$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$ と因数分解し，$a-b$，a^2+ab+b^2 の符号および大小関係に着目するなどして条件を絞り込む。

$a^2+ab+b^2=\left(a+\dfrac{1}{2}b\right)^2+\dfrac{3}{4}b^2 \geqq 0$（実際には >0）より　$a-b>0$

さらに，$a^2+ab+b^2-(a-b)=\dfrac{1}{2}\{(a+b)^2+(a-1)^2+(b+1)^2-2\} \geqq -1$ より

$$a^2+ab+b^2 \geqq a-b-1$$

以上と $217=7 \cdot 31$ より　（$a-b$，a^2+ab+b^2）＝（1，217），（7，31）

それぞれの場合について調べると，以下の結果が得られる。

（a，b）＝（-8，9），（1，6），（6，-1），（9，8）