小・中・高一貫　受験数学のツボ（仮称）

【見た目にビビらない！～数式を読み取るツボ～】分数・分数式編

(1)［小学校レベル］$3.14\div2+3.14\div3+3.14\div5+3.14\div6$ を計算せよ。

(2)［中学校レベル］反比例 $y=-\dfrac{1}{2x}$ の比例定数は $\boxed{}$ である。

(3)［中学校レベル］$\dfrac{1}{4}x^2+x+1$ を因数分解せよ。

解答

(1)　3.14 が 4 回出てきているので，何らかの工夫をさせる問題なんだな，ということは分かると思います。そう，分配法則［●×■＋●×▲＝●×(■＋▲)］です。ところが，分配法則は式全体が積の和になっているときに使える法則。この式は「商の和」になっていますから注意してください。$3.14\div(2+3+5+6)$ としてしまうと間違いです。そう，わり算をかけ算に直すことが出来るかどうかがポイントになります。たとえば，$3.14\div2=3.14\times\dfrac{1}{2}$ のように表すことができます。他も同様に考えると，

$$(\text{与式})=3.14\times\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\right)=3.14\times\left(\frac{6}{5}\right)=3.14\times1.2=3.768$$

参考　括弧内を計算する際も，$\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{6}=\dfrac{3+2+1}{6}+\dfrac{1}{5}=1+\dfrac{1}{5}$ のようにすると計算が楽になります。ちなみに，3 つの単位分数（分子が 1 である分数）の和が 1 になるのは，ほかに $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}=1$，$\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}=1$ の場合があります。

(2)　$y=\dfrac{a}{x}$ の形に直したときに，a の部分が比例定数になる。

$y=-\dfrac{1}{2x}=-\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{x}=-\dfrac{1}{2}/x$ として，比例定数は $-\dfrac{1}{2}$

参考　分母を払って $xy=a$ の形にして解くのが中学生には易しい。この方法はたとえば次の類題を解く際には有効である。

［類題］y は x に反比例し，$x=\dfrac{3}{4}$ のとき $y=-\dfrac{5}{2}$ である。比例定数を求めよ。

［答：$-\dfrac{15}{8}$］

ただし，この種の問題に取り組む際，単に「反比例の比例定数を求める際は x の値と y の値とをかければよい」という事実を単体で暗記しているだけでは，本当に反比例を理解しているとはいえません。

(3)　よく「因数分解は展開の逆」と習います。$\frac{1}{4}x^2=\left(\frac{1}{2}x\right)^2$ と考えて，何かの展開の逆になっていないか･･･と考えてみます。すると，$x=2\times\frac{1}{2}x$ と考えることによって，この式は $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$ において $a=\frac{1}{2}x$，$b=1$ とした場合であるということが分かります。したがって，(与式)$=\left(\frac{1}{2}x+1\right)^2$

参考　問題集ではよく目にする因数分解ですが，$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$ の公式を習いたての人向けに書く場合，つまりこの公式を使わせるという意図でこの問題を収録する場合を除き，これを模範解答とはしないでしょう。「その式の見方を思いつかない限り因数分解できないの？」と言われれば，そうではないからです。というわけで

別解（というより，こちらが本来模範的な解答）

分数はイヤなので，まず $\frac{1}{4}$ でくくります。イヤなものは，なるべく早めに処理して，「分数のない」ところで考えたいじゃないですか。分数の苦手という人の中には，分数をうまく扱いたいとは思うけれども，そもそも分数が出てこないようにすることには意識が向けられない人がかなりいると思います。かといって，全体に4をかけて分母を払ってはダメですよ。今は「2次方程式を解け」ではなく「因数分解せよ」ですから，式の値を変えないように変形していかなくてはなりません。

･･･こんなふうに注意されたのも，今となっては懐かしいでしょう？（笑）

$$(\text{与式})=\frac{1}{4}(x^2+4x+4)=\frac{1}{4}(x+2)^2$$

$\frac{1}{4}=\left(\frac{1}{2}\right)^2$ に注意して (与式)$=\left\{\frac{1}{2}(x+2)\right\}^2$ と考えれば前述の解答と同じ式です。

［類題］$\frac{1}{8}x^2+x+\frac{3}{2}$ を因数分解せよ。　　［答：$\frac{1}{8}(x+6)(x+2)$］

本問，類題とも，いわゆる「たすきがけ」で解けます。分数と分数のたすきがけなんて，やったことありますか？･･･余裕のある人は，頭の体操だと思ってやってみても面白いかも知れません。

(4) ［高１レベル］

θ が鈍角で，$\tan\theta=-2$ であるとき，$\dfrac{\cos\theta}{1+\sin\theta}+\tan\theta$ の値を求めよ。

解答

もちろん，与えられている tan の値から sin，cos の値を求めることができますから，基本的にはそれでも結構です。ですが，「式の値を求める際は，式を簡単にしてから代入するのが鉄則」ということを少し思い出してみてください。さらに，その際は「tan はバラすのが鉄則」だったはずですね。まずはこれらの鉄則に従って sin と cos だけの式にし，そのうえで，何の値が必要か判断するようにしましょう。すると，

$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ および $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ より，

$$\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}+\tan\theta=\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}+\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\cos^2\theta+\sin\theta(1+\sin\theta)}{\cos\theta(1+\sin\theta)}$$

$$=\frac{\cos^2\theta+\sin\theta+\sin^2\theta}{\cos\theta(1+\sin\theta)}=\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta(1+\sin\theta)}=\frac{1}{\cos\theta}\quad\cdots(※)$$

のように，約分できて cos だけの式になってしまいますから，与えられた tan の値から cos の値だけ作ってここに代入すればいいんですね。このとき使う公式は，たまにしか使わないので忘れやすいですが $1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$ でした。この公式を使う時は，cos の符号に注意してやります。問題文に「θ が鈍角で」とありますから，cos は負です。

…一方，$\tan\theta=2$ を $1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$ に代入すると $1+(-2)^2=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$

よって $\cos^2\theta=\dfrac{1}{5}$ となり，θ は鈍角より $\cos\theta<0$ だから，$\cos\theta=-\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

これを (※) の式に代入して，求める値は $1\Big/\left(-\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)=-\sqrt{5}$

…一応，sin と cos の値を両方求めて代入する方法でも解いておいた方がよいので，

別解

［$\cos\theta$ の値を求めたあと］

$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ より $\sin\theta=\tan\theta\cos\theta=-2\cdot\left(-\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$ と分かる。

これらを与えられた式に代入したのち，分母と分子に同じ数（ここでは $\sqrt{5}$ ）をかけて整理していくと，

$$\frac{-\frac{1}{\sqrt{5}}}{1+\frac{2}{\sqrt{5}}}+(-2)=-\frac{1}{\sqrt{5}+2}-2=-\frac{\sqrt{5}-2}{(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2)}-2$$

$$=-\frac{\sqrt{5}-2}{5-4}-2=-\sqrt{5}+2-2=-\sqrt{5}$$

…まさか分母の有理化などやらされるとは，想像だにしていませんでしたね。それ以前に，分数式に分数の値を代入すること自体，結構イヤなんですが。計算量的にはどちらの解法も同じ程度なのでしょうが，「なるべく分数の形が出てこないように」と考えたら，やはり最初に与えられた式の方を簡単にすべきでしょうね。

参考

そうそう，今の別解で用いた $\sin\theta=\tan\theta\cos\theta$ についても「何それ？」と質問をする人がいるかも知れませんが，これは $\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ の両辺に $\cos\theta$ をかけて分母を払い，さらに両辺を入れ替えたものです。よく使うので，指導者によってはこちらも独立した「準公式」として教えたりするようなのですが，知っていましたか？
tan の値が与えられて cos と sin の値を求める問題では，ほとんどの場合 cos が先に求まりますから，sin の値が出てくるのは最後です。cos しか与えられていないときは $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ を使うしかないのですが，後述するように 2 乗はなるべく出てこない方がいいので，$\sin\theta=\tan\theta\cos\theta$ を使ってください。実は，この式の分母を払っておくこと自体も「式の値を求める際は，式を簡単にしてから代入するのが鉄則」に基づいています。加えて，毎回同じことをするのなら，その結果を覚えておいたらどうかということになるのですね。
まあ，θ の範囲が $0°\leqq\theta\leqq180°$ の場合に限れば，$\sin\theta$ が負になることはないですし，さらに $\cos\theta$ と $\tan\theta$ の符号は常に同じですから，符号の処理はある程度機械的に出来てしまうのですが，ここで「ナメて」しまうと，一般角になったときにつまずく危険性が高くなります。そう考えて改めて「$\sin\theta=\tan\theta\cos\theta$」という式の形を見てみると，ずいぶん「嬉しい」形をしているのが分かりますか？ほら，$\tan\theta$ の値と $\cos\theta$ の値を入れれば，$\sin\theta$ の値は 1 つだけ求まるようになっているじゃないですか。こういった，ちょっとした式の形に注意することも，これからの学習において重要になってくるのです。

⑸［高２レベル］

関数 $y=\log_2 x^{\log_2 x}+\log_{\frac{1}{4}} x$ （$1 \leqq x \leqq 8$）の最大値と最小値を求めよ。

解答

※以下執筆中

【まとめ問題】

⑹［高３レベル］

次の不定積分を求めよ。（ｉ）$\displaystyle\int \frac{dx}{\tan x}$　（ⅱ）$\displaystyle\int \frac{dx}{x\log x}$

解答

※最終的に，ここにもってきたい。（この問題を自然に解けるような式の見方が出来るようになることがとても重要）

＝＝＝＝＝

【はじめに】・・・ですが都合によりこの場所に書きます

いわゆる中高一貫校で数学を教えていると，教えている分野が違っても複数の学年・クラスに一緒のことを言うことが多くあります。そこで，受験生の皆さんに，今までに習ってきた内容をふりかえってもらいたいと思います。その際，ただ問題の答えを出すだけでなく，それらの問題を解くことを通じてどんな「力」を身につけるべきであったか，しっかり見つめ直して欲しいのです。

・・・今までに，こんな問題をやりませんでしたか？そんなに難しい問題ではありません。でも，理解できなかったのをそのままにしてしまった人，しっかりやっていなかった人にはキツイかも知れません。頭の中で解法をイメージしたのち，［解答］をザッと読み流してください。その際，参考に書いた内容についても，皆さんがそれぞれに該当分野を勉強した当初の自分をイメージして，その当時に意識できていたかどうか，少し思い返してみてください。