『ふとした疑問』を大切にして，学び直しのきっかけに！　’14 5/13 作成

　先日，高校を卒業後理系の学部に進まれたという大学生のかたから，次のような質問を受けました。

「教えて欲しいことがあるんですけど，0！（階乗）って何故1なんですか？」

こういった質問をされるということは，恐らく，久しぶりに場合の数・確率の知識を使う機会があって，復習の必要に迫られたのだと思います。ところが，そのときに読んだ何かの本には理由が説明されておらず，ただ「1です」としか書いていなかったのでしょう。そして，（これは筆者の少ない経験にもとづいた推測ですが）

「n！はnから1まで数をかけたものだから，0！＝0×1＝0じゃないの？」

と思われたのではないかと。もしかすると，けっこう鋭い質問かも知れません。

　が，この疑問そのものに対する答えは，実は大したことではありませんでした。結論を言うと，$0!=1$ は「定義」です。もう少し，学ぶ人寄りの表現にすれば，

「そのように決めておくと，他の公式もスッキリ書けるから」

とでも言うべきでしょうか。一応，その例が出てきて納得してもらえるところまで，話を進めることにしましょう。

　高校の教科書では，いわゆる順列の総数 $n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)$ を導入するところで，これを表す記号を ${}_n\mathrm{P}_r$ と決めています。すると，$r=n$ とした特別な場合として ${}_n\mathrm{P}_n=n(n-1)(n-2)\cdots2\cdot1$が現れます。ここで，その右辺を $n!$ と表すと決めます。

　そのあと，組合せの総数としてお馴染みの ${}_n\mathrm{C}_r=\dfrac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{r(r-1)(r-2)\cdots2\cdot1}$ が出てくるのですが，遅くともここで，${}_n\mathrm{C}_r=\dfrac{n!}{n!(n-r)!}$ のような表し方が登場するのを覚えているでしょうか。実は，ここから $0!$ をちゃんと決めておかないと困ったことが起こるのです。

　$n!$ のときのように，特別な場合として $r=n$ としてみましょう。すると，$n-r=0$ になりますから，${}_n\mathrm{C}_n=\dfrac{n!}{n!0!}$ ですよね。ところが，${}_n\mathrm{C}_n$ の値って何でしょう？「与えられた n 個をすべて選ぶ方法」は1通りですから，値としては当然1になるべきです。とこ

ろが，もし $0!=0$ だったりすると，分母が 0 になってしまい，それ以前のことが起こってしまい，$r=n$ のときだけ先ほどの公式は使えない！ということになって，その場合もカバーするように，別途「ただし，${}_n\mathrm{C}_n=1$ とする」と付け足す必要が生じます。何より不便ですし，本質的でないところで教科書の記述が増え，読みづらくなります。そんなことに無駄に紙面を費やすぐらいなら，$0!=1$

…と決めておけば何より便利だし，場合分けなども必要なくなるからスッキリ！

しますよね。実はそれだけのことなんですが，理屈抜きに「1 なんだこれは！」と言われると，案外納得できないものなんです。そういうときに役に立つのは，やはり教科書です。多少そっけない部分もありますが，教科書では細かい部分もごまかさずに説明することになっているので，きちんと読めばそれだけでも勉強になり，ひねった問題に触れるのとは別の意味で，理解を深めることが出来ると思います。

あと，本によって説明の仕方が違うかも知れないので補っておくと，${}_n\mathrm{P}_r$ の説明の段階で，${}_n\mathrm{P}_r=n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)$ にあえて分母を作って，分母と分子に同じものをかけると ${}_n\mathrm{P}_r=\dfrac{n(n-1)\cdots(n-r+1)\cdot\{(n-r)(n-r-1)\cdots 1\}}{(n-r)(n-r-1)\cdots 1}$，よって ${}_n\mathrm{P}_r=\dfrac{n!}{(n-r)!}$ というふうに階乗が出てきます。ここで $r=n$ の場合を考えると ${}_n\mathrm{P}_n=\dfrac{n!}{0!}$ となり，やはり $0!=1$ とした方が都合がよくなります。

さらに，こういうとき，余裕があれば，教科書の前後の箇所も同じ視点を持って読んでみて下さい。教科書であれば，${}_n\mathrm{C}_r=\dfrac{n!}{r!(n-r)!}$ が $r=0$ でも成り立つように，${}_n\mathrm{C}_0=1$ と定めることもどこかに書かれているはずですが，こうしておくと，公式 ${}_n\mathrm{C}_r={}_n\mathrm{C}_{n-r}$ なども含め，やはりいろいろな内容がスッキリしますよ。

多くの高校生の皆さんは，テストによく出る問題の解き方に数多く，効率よく触れることに力を注いで学習していると思います。今の日本には，大学入試という人生の大きな「締め切り」があり，それがあるからこそ皆さんが高度な内容に触れようとしてくれるわけで，筆者がそれを否定することは言いません。が，「そこ」から自由になったあと，皆さんには，勉強を終わりにせずに，いつか別の観点から，学び直す機会を持って欲しいと思います。そのときには，基本事項自体を新鮮な目で眺めることになり，今のような疑問が出てくるでしょう。が，数学に限らず，批判的な目で見たり，問題意識を持ったりすることは実は大事で，学ぶ対象は同じでも，そこからまったく違う学習が始まる，なんてことが起こります。「学び直し」，筆者からも強力におすすめします！