１段上の実力をつけよう！（仮称）～「桁数と評価」編

先日，とあるきっかけで，次の問題を解説することになりました。なかなか難しい問題ですが，皆さんも考えてみてください。

【問題】

$4^{23}+5^{20}$ は何桁の自然数であるか。また，その先頭の数字は何か。

必要であれば，$\log_{10}2=0.3010$ を用いること。

【解答】

$\log_{10}4^{23}=23\log_{10}4=46\log_{10}2=46\cdot 0.3010=13.846$ $\cdots$①

また，$\log_{10}5=\log_{10}(10\div 2)=\log_{10}10-\log_{10}2=1-\log_{10}2$ に注意すると，

$$\log_{10}5^{20}=20\log_{10}5=20\cdot(1-\log_{10}2)=20\cdot 0.6990=13.980 \quad\cdots②$$

よって，①，②より $4^{23}<5^{20}$ であるから，$2\cdot 4^{23}<4^{23}+5^{20}<2\cdot 5^{20}$ $\cdots$③

ここで，①より　$\log_{10}(2\cdot 4^{23})=\log_{10}2+13.846=0.3010+13.846=14.147$

②より　$\log_{10}(2\cdot 5^{20})=\log_{10}2+13.980=0.3010+13.980=14.281$

であり，$\log_{10}(1\cdot 10^{14})=14$ ，$\log_{10}(2\cdot 10^{14})=\log_{10}2+14=14.301$ より

$$1\cdot 10^{14}<2\cdot 4^{23}<2\cdot 10^{14}\ ,\ 1\cdot 10^{14}<2\cdot 5^{20}<2\cdot 10^{14}$$

が成り立つから，③より　$1\cdot 10^{14}<4^{23}+5^{20}<2\cdot 10^{14}$

したがって，$4^{23}+5^{20}$ は<u>15 桁</u>の自然数で，その先頭の数字は<u>1</u> である。　$\cdots$［答］

結論から言うと「桁数と先頭の数字の問題に『評価』という要素が加わった，やや高度な問題ですね」となるのですが，一般の受験生にとっては，標準典型題とは違ってどう取り組んでいいか分からない厄介な問題だなあ$\cdots$という印象になる問題でしょうね。そこで大事になるのは，問題を目にして「典型題と違うなあ」と感じたときに，そこで思考を止めず，その難しさのもとになっている部分はどこかをきちんと見極めることです。

ここで我慢してもう少し考えていくと，主眼となるのは，「$4^{23}+5^{20}$」という数の「代用品」をいかに見つけるかだろうということになるでしょう（一応，数の大きさの見積もりの道具『常用対数』の代用品が見つかる可能性もありますが，経験上そちらの可能性は低いこともお分かりいただけると思います$\cdots$）。そして，その「代用品」となる数というのは，$4^{23}+5^{20}$ と近い数で，なおかつ対数の諸公式と相性の悪い「＋」の記号を含まないものだろうと見通しを立てます。

その際に，注意すべきことがあります。似た数を用意するとき，その数ともとの数との差は一体どれぐらいなのでしょうか。「大体これぐらいの大きさ」というだけでは，例えばいくら「４桁で先頭の数字は９の数に近いよ」と主張しても，例えば 9998 に３をたす

と 10001 となって桁数も先頭の数字も変わってしまうといったことが起こり得て，答案としては不十分となります。それを防ごうと思ったら，例えば「この数は 9000 以上の数だが，10000 よりは小さいよ。だから，4 桁で先頭の数字は 9 だよ」というふうに，言ってみれば逃げ道をなくす必要があります。このように，問題の中に直接扱いにくい数があるときなどに，その数と何か別の数の大小関係を明らかにすることを，数学では「評価する」と言うんです。

ただ，この「評価する」という考え方自体は，教科書で「常用対数の桁数」について学ぶときにすでに出てきています。そもそも，自然数 N が $3<\log_{10}N<4$ をみたすとき，N は 4 桁の自然数と結論できるのは，3 と 4 がそれぞれ 1000 と 10000 の常用対数で，常用対数の大小が真数の大小と一致するからでしたよね。そして，このことをしっかりと（深いレベルで）理解していれば，例えば 4 桁の自然数 N の先頭の数字が 2 であることを言おうと思えば， $3+\log_{10}2<\log_{10}N<3+\log_{10}3$ が成り立つことを言えばよいという話もすんなり理解できるでしょう。そこまで来れば応用レベルまであと 1 歩。

『そうか，$4^{23}+5^{20}$ の常用対数を直接求めることができなくても，$4^{23}+5^{20}$ より少し小さい数と少し大きい数を何か見つけて，それらの常用対数を計算できれば，$4^{23}+5^{20}$ の桁数や先頭の数字を知る手がかりにできるかも知れないぞ！？』

という考えに行きつくことができ，以下のようなストーリーを思い描くことができるのではないでしょうか？？（もちろん，誰でもすぐに，というわけではありませんが）

『$4^{23}+5^{20}$ という数は，このような範囲にある数ですよ。その両端の数というのは，もちろん $4^{23}+5^{20}$ とは違う数なのだけれども，両方とも○○桁の数で，先頭の数字は△△になっています。だから，その間にある $4^{23}+5^{20}$ の桁数と先頭の数字も同じ○○と△△（具体的には 15 桁，先頭は１）になっちゃいます』

･･･でも，「自然数 N の常用対数を計算して，小数点以下を切り上げたものが桁数だ」という事実をただ暗記して，それに機械的に当てはめて問題を解いているだけでは，いつまでたってもタイトルにも書いた「１段上の実力」をつけることはできません。まずはそこを抜け出さないことには，次の「先頭の数字」でつまずいてしまうか，さらなる暗記に頼らざるを得なくなり，あっぷあっぷになってしまうのがオチです。

少々余談になりますが，こういった状況を見るにつけ，筆者もいち指導者として（そして数学参考書研究家として）受験生を教科書レベルの「桁数と小数首位」の次の段階であ

る「先頭の数字」の問題に触れさせる時期については，とても気を遣います。理系であれば，極限分野で学ぶ「はさみうちの原理」が考え方としては近いですから，その話になったときに，ついでに復習かたがたこちらにも触れ，理解が浅い生徒さんが多いと感じたら，今のような話をして理解を深めてもらいたらと思います。もし文系学部の入試問題として出題されたら，かなり高級な部類に入るでしょう。確実に合否を分けます。どちらにせよ，常用対数の使い方はさることながら，それ以前の「式の見方」あるいは「概数の見積もり」といった考え方（例えば「2^{10} は 1000 に近い数だな」といったような）を日々しているかどうかで，出来はかなり左右されるでしょう。

　このようなことを頭に入れながら，もう一度【解答】を読み返し，皆さんがご自分の言葉を補いながら清書しなおしてみてください。【解答】で何をしているか，そして皆さんがこのテの問題に取り組むとき何をしなくてはならないのか，より理解できると思います。･･･実は，ここでその作業をしてもらいたいがために，最初わざと「詰めて」書いたんですよね。筆者らしからぬ？解答の書き方で，どうも申し訳なかったですね（苦笑）

【解答】

まず 4^{23} の常用対数をとると，

$$\log_{10}4^{23}=23\log_{10}4=46\log_{10}2=46\cdot 0.3010=13.846 \quad \cdots①$$

一方，

$$\log_{10}5=\log_{10}(10\div 2)=\log_{10}10-\log_{10}2=1-\log_{10}2$$ ←これは常識ですぞ？

に注意して 5^{20} の常用対数をとると，

$$\log_{10}5^{20}=20\log_{10}5=20\cdot(1-\log_{10}2)=20\cdot 0.6990=13.980 \quad \cdots②$$ ←ほぼ等しい！

①，②より，4^{23} と 5^{20} の大小は $4^{23}<5^{20}$ とわかるから，これより　←少しだけ違う

$$2\cdot 4^{23}<4^{23}+5^{20}<2\cdot 5^{20} \quad \cdots③$$ ←自分の代わりにコイツらに働いてもらおう･･･

という大小関係が得られる。

ここで，$2\cdot 4^{23}$ と $2\cdot 5^{20}$ の常用対数をとると，それぞれ

①より　$\log_{10}(2\cdot 4^{23})=\log_{10}2+13.846=0.3010+13.846=14.147$

②より　$\log_{10}(2\cdot 5^{20})=\log_{10}2+13.980=0.3010+13.980=14.281$　←これもほぼ等しい！

となり，$\log_{10}(1\cdot 10^{14})=14$，$\log_{10}(2\cdot 10^{14})=\log_{10}2+14=14.301$ より

$$1\cdot 10^{14}<2\cdot 4^{23}<2\cdot 10^{14}，\ 1\cdot 10^{14}<2\cdot 5^{20}<2\cdot 10^{14}$$ ←両方ともこの間に入った！

が成り立つから，③より

$$1\cdot 10^{14}<4^{23}+5^{20}<2\cdot 10^{14}$$ ←めでたくこの数も同じ所に入ると分かった！

したがって，$4^{23}+5^{20}$ は 15 桁の自然数で，その先頭の数字は 1 である。　･･･［答］

【別解･･･のあらまし】

「評価」さえ出来ればよいのなら，別の解法も考えられるはずです。【解答】における①，②は，一応 4^{23} と 5^{20} がともに 14 桁の自然数で，しかもその中ではかなり大きい方であることを主張していますから，もしこの時点で（２個いっぺんになりますけれど）何らかの望ましい「評価」をかましてしまえたら，かなりラッキーパンチぽいですが答えが得られるはずです。･･･そして，実は出来てしまいます。

具体的には，$5\cdot10^{13}<4^{23}<10^{14}$ と $5\cdot10^{13}<5^{20}<10^{14}$ が分かり，それらから一応 $10^{14}<4^{23}+5^{20}<2\cdot10^{14}$ が導けますから，答えにたどり着きます。ただ，①，②の２つの常用対数の値を見て，それらの和の桁数と先頭の数字まで見切ろうとすれば，数自体の扱いにかなり慣れていないとダメだろうと思います。結局，この考え方が出来る受験生は【解答】のような考え方が出来る層とほぼ同じであろうと筆者は予想します。

【知っておくと得するかもしれない？事項】

そもそも，常用対数を用いて先頭の数字を求めるのには，次の log の値が必要になります。

$\log_{10}1$（$=0$），$\log_{10}2$，$\log_{10}3$，$\log_{10}4$（$=2\log_{10}2$），$\log_{10}5$（$=1-\log_{10}2$），

$\log_{10}6$（$=\log_{10}2+\log_{10}3$），$\log_{10}7$，$\log_{10}8$（$=3\log_{10}2$），$\log_{10}9$（$=2\log_{10}3$）

多くの問題では $\log_{10}2$ と $\log_{10}3$ の値が与えられていて，かつ $\log_{10}7$ の値が使えなければ，それらだけできちんと「はさめる」のはいつのときだろうかと逆に考えれば，先頭の数字が１，２，３，４，５，８，９という答えしかありえないことになります（！）

さらに，本問に戻ると，･･･ん？？与えられている log の値は $\log_{10}2$ だけじゃないですか。ということは，$\log_{10}7$ はおろか $\log_{10}3$ も $\log_{10}6$ も $\log_{10}9$ も作れませんから，この条件で答案がちゃんと作れるのは先頭の数字が１と４のときだけになっちゃうじゃないですか（まさかこの問題をマーク式で出題するところはないと思いますが，もしそうなったら，今のことを知っている時点で先頭の数字は２択になってしまいます！）。例えるなら「クラリネットを壊しちゃって，ドとレとミの音が出ない♪」状態ですな（汗）

【これは完全に余談】

･･･ただ，余談になりますが，本当に必要であれば $\log_{10}2$ と $\log_{10}3$ の近似値を用いて $\log_{10}7$ の値自体を「評価」してしまうこともできます（例えば $48<7^2<50$ を用いる。万が一これで精度が足りなければ 7^3 を何かではさめばどうか？･･･というふうに考えていけばよいらしい）。ここまでくるとほぼ「裏ワザ」に近いのですが，他の受験生はここまで勉強しないだろう，でも自分は知っているんだ･･･という内容をいくつか知っていることがある種の「自信」につながれば，筆者などが言うことは何もありません（苦笑）