コレクターの問題：５種類のオマケが全部揃う確率　　'11 10/26

皆さんは物集めにハマる「コレクター」でしょうか？・・・自分はそうでなくても，知人に1人か2人そういう人を知っていませんか。スナック菓子のオマケの人形を見ると，コレクター魂の持ち主なら全部集めたく（「コンプリート」したく）なります。ところが，なかなか一発では揃わない。そのためにお菓子を「大人買い」しようとすると，他人事ながら，お金は一体どれぐらいかかるのかと心配になってしまいますね。・・・今回は，そのような問題について考えてみましょう。

【問題】
5種類のオマケのうちどれか1種類が等しい確率で封入されて売られているスナック菓子があります。あなたは，このスナック菓子のおまけを全て揃えたいと思っていますが，一体いくつぐらい買えば，全てのオマケが揃うでしょうか？
ただし，スナック菓子のパッケージを外から見ただけではどのオマケが入っているかは分からず，このスナック菓子を買う以外にオマケを入手する手段はないとします。

参考のために，まずは最もラッキーな場合，つまりスナック菓子を5個（箱）買うだけで5種類のオマケが揃う確率を考えてみましょう。

仮にオマケをA～Eとし，すべての出方を考えると，1個目の出方がA～Eの5通り，それぞれに対して2個目の出方も5通りずつ，・・・となっていくので，オマケの出方は全部で$5\times5\times5\times5\times5=5^5=3125$（通り）です。これらはどれも等しい確率で起こります。

このスナック菓子を5個買うだけで5種類のオマケが全て出てくるためには，1個目の出方5通りのそれぞれに対して，2個目の出方として可能であるのは（例えば1個目にAが出たらB～Eのどれかといったように）$5-1=4$（通り）ずつしかありません。そのまたそれぞれに対して，3個目の出方として可能なのは1個目と2個目に出たものを除いた3通りずつ，同様に4個目は2通りずつ，5個目は1通りずつとなります。よって，5個目で全てのオマケが揃う出方は$5\times4\times3\times2\times1=5!=120$（通り）しかありません。

よって，5個でオマケが全て揃う確率は$\dfrac{120}{3125}=\dfrac{24}{625}=0.0384$です。百分率で表すと，何とたったの3.84％！これはとてつもなく低い確率だと分かるでしょう。

慣れている人は，こういうことを経験上何となく知っていて，より確実性を増すためにもう少したくさん買おうとするでしょう。すぐ行ける店に売っている品物であれば，何かのついでに1～2個ずつ買い足していき，気長にコンプリートを目指すでしょうが，例えばお店が遠くて誰かに買って来てもらわないといけなかったりすると，何度も頼むわけにはいきませんから，悩みは深くなると思います。

このような確率について考えるときは，「今自分はどういう状態にあるか？」ということを考え，菓子を1個買い足したときに状態○○から状態△△に移る確率がいくらになるか？と考えていくと，うまくいくことが多いです。そこで，オマケを x 種類持っている状態を「状態 x」とし，菓子を n 個買ったときにオマケが x 種類揃う確率を $P(n,\ x)$ と表します。また，菓子を1個買い足したときに持っているオマケの種類が x_1 種類から x_2 種類になる（状態 x_1 から状態 x_2 に移る）確率を $p(x_1,\ x_2)$ と表します。例えば，すでにオマケＡ，Ｄ，Ｅを持っているとすれば，あと1個買い足したときにまだ持っていないオマケＢ，Ｃのいずれかが手に入る確率は $\dfrac{2}{5}$ だから $p(3,\ 4)=\dfrac{2}{5}$，それ以外のものが出るとオマケは3種類のままですから $p(3,\ 3)=\dfrac{3}{5}$ になります。このように考え，他の場合も全て求めると以下のようになります。

$$p(1,\ 1)=\frac{1}{5},\quad p(1,\ 2)=\frac{4}{5},\quad p(2,\ 2)=\frac{2}{5},\quad p(2,\ 3)=\frac{3}{5},$$
$$p(3,\ 3)=\frac{3}{5},\quad p(3,\ 4)=\frac{2}{5},\quad p(4,\ 4)=\frac{4}{5},\quad p(4,\ 5)=\frac{1}{5},\quad p(5,\ 5)=1$$

次に，これらを使って $P(n,\ x)$ を順番に求めていく方法について考えます。最初は必ずどれか1種類手に入りますから，明らかに $P(1,\ 1)=1$，$P(1,\ 2)=0$，$P(1,\ 3)=0$，$P(1,\ 4)=0$，$P(1,\ 5)=0$ です。$n \geqq 2$ の場合，n 個の菓子を買ったときに x 種類のオマケが揃うのは

① $n-1$ 個目までに $x-1$ 種類のオマケが揃っていて，n 個目を買ったときにそれまで持っていなかった種類が出る

② $n-1$ 個目までに x 種類のオマケが揃っていたが，n 個目を買ったときにそれまでにすでに持っていた種類が出る

のいずれかで，次のようになります（ただし $x=1$ のときは①を考えません）。

$$P(n,\ 1)=P(n-1,\ 1)\times p(1,\ 1)=\frac{1}{5}P(n-1,\ 1)$$

$$P(n,\ 2)=P(n-1,\ 1)\times p(1,\ 2)+P(n-1,\ 2)\times p(2,\ 2)$$
$$=\frac{4}{5}P(n-1,\ 1)+\frac{2}{5}P(n-1,\ 2)$$

$$P(n,\ 3)=P(n-1,\ 2)\times p(2,\ 3)+P(n-1,\ 3)\times p(3,\ 3)$$
$$=\frac{3}{5}P(n-1,\ 2)+\frac{3}{5}P(n-1,\ 3)$$

$$P(n,\ 4)=\cdots=\frac{2}{5}P(n-1,\ 3)+\frac{4}{5}P(n-1,\ 4)$$

$$P(n,\ 5)=\cdots=\frac{1}{5}P(n-1,\ 4)+P(n-1,\ 5)$$

これらの式を使うと，n がどんなに大きくなっても，$P(n，5)$ を順次求めていくことができます。例えば，$P(10，5)$ を求めるには $P(9，4)$ と $P(9，5)$ が必要で，そのためにはさらに $P(8，3)$，$P(8，4)$，$P(8，5)$ が必要で・・・となっていくことが，お分かりいただけたと思います。

これで一応 $P(n，x)$ が求まる仕組みは理解していただけたかと思いますが，n が少し大きくなると，手計算で求めるのは大変です。こういうとき，コンピュータの表計算ソフトが威力を発揮します。左端の 1，2，3，4，・・・は表計算ソフトにおける行番号，上端の A，B，C，D，E，F は列記号です。

	A	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*
1		1	2	3	4	5
2	1	$P(1，1)$	$P(1，2)$	$P(1，3)$	$P(1，4)$	$P(1，5)$
3	2	$P(2，1)$	$P(2，2)$			
4	3	$P(3，1)$				
：	：					

このように $P(n，x)$ を並べて表示しようと思えば，表計算ソフトには次のように入力します。②が難しいですが，関係のある数値どうしが隣り合うセルに並ぶので，1つ1つ落ち着いて考えていきましょう。①，②で間違えなければ，③で下に向かってコピーしていくことによって，どれだけ n が大きくなってもほぼ瞬時に計算できるのが，表計算ソフトの素晴らしいところです。

	A	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*
1		1	2	3	4	5
①数値を入力する→		1	0	0	0	0
②数式を入力する→						
4	3					
：	：					

←③数式をコピーする

＝0.2＊B2　＝0.8＊B2＋0.4＊C2　＝0.6＊C2＋0.6＊D2　＝0.4＊D2＋0.8＊E2　＝0.2＊E2＋F2

このように計算して実際に求めた結果を，以下にアップしましたのでご覧ください。
（→http://green.ap.teacup.com/reviewermizuno/html/omakekakuritsu.pdf）
この結果から，$P(10，5)＝0.5225$・・・より，菓子を 10 個買ってようやくコンプリート率が 50 %を上回ることが分かります。逆に言うと，10 個買っても運が悪いと半分ぐらいの確率で揃わないということです。95 %以上の確率でコンプリートしようとすると，$P(21，5)＝0.9541$・・・より，菓子を 21 個も買わないといけないことになります。品物にもよりますが，なかなかの出費になってしまいますね。

コレクターの問題：５種類のオマケが全部揃う確率

'11 10/26

表計算ソフトでは，0 に近い値は 10^n 表示で表されます。例えば「1.024E−07」は $1.024\times10^{-7}=1.024\times0.1^7$ を表します。小数第 7 位になってはじめて 0 でない数字が現れるというごく小さい数値（確率）ですが，理論的には，ごくわずかの確率でこうなることもあるということです。

【追加問題】
あなたは，この問題と同じお菓子を何個か買いましたが，オマケは 3 種類しか手に入りませんでした。あと何個ぐらい買い足せば，オマケが全て揃うでしょうか。

一度表計算ソフトで計算済みであれば，同じシートを流用することができます。仕組み自体はほとんど同じで，最初の状態が変わるだけだからです。

	A	B	C	D	E	F
1		1	2	3	4	5
①数値を修正する→		0	0	1	0	0
3	1					
② n を 1 ずつ	2					
減らす→	:					

まず，一番上の行に「1，0，0，0，0」と入力した部分を「0，0，1，0，0」に修正すれば，最初に 3 種類のオマケを持っていることが表現できます。注意すべきは，n は「買い足す個数」に変わるので，その行の 1 つ下が $n=1$ のときの確率，以下，$n=2$，3，・・・のときの確率に変わるということで，そのために②の操作が必要になります。

計算した結果は以下を参照して欲しいですが（ただし，PDF 化の際に $x=1$，2 の行は非表示にしました），50 %以上の確率でコンプリートするには 6 個，95 %以上の確率でコンプリートするには 17 個買わなくてはならないという，何とも素晴らしい（？）結果が出てしまいました。先ほどの 21 個という答えと，さほど変わらないじゃないかと。これには筆者もかなり予想を裏切られました。・・・オマケって怖いです。
（http://green.ap.teacup.com/reviewermizuno/html/omakekakuritsu3ko.pdf）

他にも，考えるべき状態の数が増えて多少ややこしくなりますが「5 種類のうち 1 種類だけはいわゆる『レア物』で，他の 4 種類の $\frac{1}{10}$ の確率でしか出ない場合」などは考えてみたら面白そうです。・・・どうですか？