

【問題】初級

次の A 、 B にそれぞれ自然数（1以上の整数）をあてはめ、計算した答えが正しくなるようにしてください。

$$\frac{1}{A} - \frac{1}{B} = \frac{1}{21}$$

【メルマガで紹介した解答・解説】 ※ 詳しくは本文を参照してください

$\frac{1}{3} - \frac{1}{7} = \frac{4}{21}$ の全体を 4 で割ると、 $\frac{1}{12} - \frac{1}{28} = \frac{1}{21}$ が得られます。

よって、 A には 12、 B には 28 がそれぞれあてはまります。

【上のやり方で見つかる別の答え】

$1 - \frac{1}{21} = \frac{20}{21}$ の全体を 20 で割ると、 $\frac{1}{20} - \frac{1}{420} = \frac{1}{21}$ が得られます。

よって、 A に 20、 B に 420 をあてはめても計算結果は正しくなります。

この調子で、いろいろな引き算について試すと、答えはさらに見つかりそうです。なかなか面白いですね。まあ「算数パズル」の範囲では、これで十分でしょう。

えっ？『算数パズル』の範囲では？ってどういうことかって？

…実はこの問題、本当にきちんと考えようとする、大学入試の問題としても十分に通用するくらい難しくなるんです。実際、今の問題が、例えば高校の定期考査や実力テスト、大学入試などで出て、あなたが上のように答えたとなると、採点する人はきっと次のような疑問を持つはずなんです。

- (1) 問題の数値や式の形が少し変わっても、いつでも同じ方法で解けるのか？
- (2) 他の答えも、本当に全部このやり方で見つかるのか？
- (3) もし見つけた以外に答えがないとしたら、それはどうやったら分かるのか？

とくに(3)はなかなか理解しがたいところで、ひょっとすると、これをお読みになっている大学生・社会人の皆さんの中には、このあたりで数学が嫌いになってしまったという人もいるかも知れないわけですが、…まあそう言わず(笑)、ちょっと「高級な」考え方に触れていただくことにしましょうね♪

※ 最後まで読み切るには中学3年程度の予備知識が必要です。

【大学入試に出題された場合の解答・解説】

(式全体のことを『両辺』といい、 $=$ の左を『左辺』、右を『右辺』といいます)

与えられた式 $\frac{1}{A} - \frac{1}{B} = \frac{1}{21}$ の両辺に A をかけ、さらに B をかけ、さらに 21 をかけ

る…つまりこれは、両辺に $21AB$ (21 と A と B をかけたもののことをこのように表します) をかけることに相当します。実は A と B はまだ求まっていないのですが、もし求められたとして、 $21AB$ で表わされる数を「仮に」考えると思ってください♪

ともかく、 $\frac{1}{A}$ に $21AB$ をかけると A が約分されて $21B$ になるから、他の部分も同様

様に考えると、下の①のような、分数の形が出てこない式が得られます。

$$21B - 21A = AB \quad \dots \textcircled{1}$$

一応、両辺を入れ替えて、下の②のような形の式にしておきましょう。

$$AB = 21B - 21A \quad \dots \textcircled{2}$$

さて次に、文字式を習ったときにかなり最初のほうで勉強するのですが「移項」という操作を②に対してやっていきます。これは、両方に同じものを足したり両方から同じものを引いたりすることによって、左辺と右辺にバラバラになった式をあるべき方へまとめるというものです。②の両辺に $21A$ を加えると、同じものの引き算だから $21A - 21A = 0$ となり、 $AB + 21A = 21B$ という式が得られます。さらに、両辺から…そう $21B$ を引けば、下の③のような式に変わります。

$$AB + 21A - 21B = 0 \quad \dots \textcircled{3}$$

ここから、さらに高度な文字式の計算やらマイナスの数(負の数)やらが出てきますが、この調子でずっと続けると書くのも読むのもしんどいでしょうから、ちょっと申し訳ないのですがそのへんの内容は知っているものとして先へ進みます(汗)

$$A(B + 21) - 21B = 0 \quad \leftarrow \text{かけ算の分配法則を使っています}$$

$$A(B + 21) - 21B - 21^2 = -21^2 \quad \leftarrow 21^2 \text{ は } 21 \times 21 = 3 \times 3 \times 7 \times 7 \text{ を表します}$$

$A(B + 21) - 21(B + 21) = -3^2 \times 7^2$ ← $(B + 21)$ が出てくるようにしたのです
…というふうに整理していくと、下の④の式が得られます。

$$(A - 21)(B + 21) = -3^2 \times 7^2 \quad \dots \textcircled{4} \quad \leftarrow (B + 21) \text{ を } 1 \text{ 文字扱います}$$

ここで、この④の式を次のように見ていくんです♪

『右辺は負の数だから、左辺も負の数にならなくてはならない。ところが、今 A にも B にも自然数しか入れないことになっている。すると $B + 21$ の部分はプラスの数(正の数)にしかなりえない。だから、④の式が成り立つためには $A - 21$ の部分を負の数にする必要があり、 A には 21 より小さい自然数を入れなくてはならない』

このことから、 A に入る可能性のある自然数は、 $1, 2, 3, \dots, 20$ しかなく、この全部が答えだったとしても答えは20個までしかないとわかります。本当にこれ以外にはないんです。まあ、このような見方をするとうまくいくことが多いので、そのために④のような式の形を作ったともいえるのですが…。ともかく、この問題に限らず「整数問題」というジャンルの問題では

「いかにして絞り込むか？」

がすべてだともいえます。今のは『かけ算の形=整数』という形にしたのがポイントだったわけですが、絞り込む方法はこの1つだけではなく、受験用の参考書を読むと実にいろいろな考え方に触れることができます。

…正直、あとはもう「どうにでもして」って感じです。上のことさえ答案できちんと行って（書いて）しまえば、採点する人はあなたが単なる当てずっぽうで答えたのではないことを理解してくれますから、最悪、 A に1から20までの自然数を手当たり次第にあてはめていって、 B を求めて整数になるかどうか調べれば済みます。

…でも、せっかくここまで来たので、もう少し「工夫」してみることにしましょう♪
工夫するときはトコトンこだわるようにすると、数学はどんどん得意になりますよ！

ここで活躍するのが、別の問題でも出てきましたが「表」です。右のような表をつくると、④の式の2つの()の中に入る数の組合せがすべて見つかり、それ

$A-21$	-1	-3	-7	-3^2
$B+21$	$3^2 \times 7^2$	3×7^2	$3^2 \times 7$	7^2
A	20	18	14	12
B	$3^2 \times 7^2 - 21$	$3 \times 7^2 - 21$	42	28

らをもとに A, B にあてはまる数を順序よく求めていくことができます。とにかく、 A と B に入る自然数の組はこの4組だけであることがわかり、それらを (A, B) と表すことにすると、

$$(A, B) = (20, 420), (18, 126), (14, 42), (12, 28)$$

のように、あてはめ方が4つあり、またこれ以外には存在しないことがわかります。

…どうでしたか？今回は、途中で「文字式の力を借りましたが、やはり最後は「考える」「調べた結果をまとめる」というところにいきつきました。算数と数学には、もちろん違うところもいろいろあるのですが、根本では似通ったところもあります。

「頭の中で考えるのが算数、その考え方を書き残したり人に伝えたりするのが数学」

…これは私の勝手な認識ですが、皆さんも当メルマガなどを通じていろいろな算数的・数学的な考え方に触れながら、ご自身の算数世界・数学世界を作っていくてください。そのお手伝いできれば、当メルマガ発行者としてこれ以上の幸せはありません。

=====

【メルマガ紹介】

「ねえ、今日から算数パズルやらない？」（まぐまぐ！ID：0000293686）

→ <http://www.mag2.com/m/0000293686.html>

【発行者プロフィール】

算数パズル・ナビゲーター 水野 健太郎（1973年9月14日生まれ）

- ・大阪桐蔭中学校高等学校 数学科 客員講師（09年度現在）
- ・聖文新社「数学入試問題詳解」解答執筆者
- ・数学指導のコンサルタント／数学参考書研究家

【発行者サイト】

「水野の数学参考書レビュー [高校数学・大学入試]」

→ <http://green.ap.teacup.com/reviewer/mizuno/>