重要問題解説「ユークリッド互除法と不定方程式の整数解」 ’11 6/3 加筆

’12 年度以降に高校に入学する生徒が履修する新課程の「数学Ａ」では，「整数」という分野が設けられ，今まで扱われることの少なかった「ユークリッドの互除法」が含まれます。互除法自体は難しくないのですが，ユークリッドの互除法が不定方程式の整数解を求める問題に応用できることが知られていて，以下で解説する解法をマスターすると，係数の絶対値の大きな不定方程式についても半ば機械的に整数解を求めることが出来るようになります。そのため，このような問題が教科書や傍用問題集の章末問題として採用されれば，大学入試問題の新たな出題パターンとなることが予想されます。

ところが，以下に示す解法は，一般の高校生には発想しづらく，何度聞いても理解しがたいものと思われます。指導者の立場にすれば，ここをうまく教えられずにつまずきのもとを作ってしまうと，整数分野に苦手意識を持たせてしまい，ひいては数学嫌いを増やしてしまうことにも繋がりかねません。「あとで解答を読んでも理解できない」と多くの質問が持ち込まれることも容易に想像ができます。そのために必要となる「予習」の手助けにと言えばおこがましいですが，本資料が少しでも皆様のお役に立つことを願います。

【問題 1 】
ユークリッドの互除法を用いて，方程式 $33x+7y=1$ の整数解を 1 つ求めよ。

【基本的な発想とその問題点】

不定方程式の解を 1 つ求めるというと，我々の多くは，x と y に適当に数値をあてはめることを想像します。ところが，本問のように係数が 33 などと絶対値の（以下では省略）大きな数になると，幾つかの値を代入して確かめるだけでも結構大変な作業になりますね。そこで，この方程式の左辺を次のように変形することを考えてみます。

↓33 という係数はやや大きい　↓括弧内を置き換える

$$\boxed{33}x+7y=(\boxed{7}\times4+5)x+7y=5x+\boxed{7}(4x+y)=5x+7\boxed{y'}$$

↑そこで 7 を作り出し ↑新たに 7 でくくる

…これは何をしているかというと，「33 という係数は手計算で解を探すにはやや大きいので，①小さい方の係数の 7 でくくれる分をくくり出して，②出てきた分を y の方にまとめ，③括弧内を新たに y' というふうに置き換えている」のです。すると，与方程式は $5x+7y'=1$ と変形でき，**片方の係数を確実に 7 よりも小さくする**ことができます。これで，解はいくぶん探しやすくなったでしょう。実際，$x=3$，$y'=-2$ とすれば，$15-14=1$ となり条件を満たします。それでも思いつかない人は，今のやり方をさらに繰り返し，

$$5x+7y'=5x+(5+2)y'=5(x+y')+2y'=5x'+2y'=1$$

と変形すれば，係数はもっと小さくなりますから，ここで $x'=1$，$y'=-2$ に気づく人も出てくるでしょう。もし，これでも思いつかないと言われたら，また繰り返します。

$$5x'+2y'=(2\times2+1)x'+2y'=x'+2(2x'+y')=x'+2y''=1$$

元の方程式の係数が互いに素である場合に限りますが，これをやれば，何回目かにどちらかの係数を必ず 1 にすることができます。この形にしてしまえば，係数が 1 になった方の

変数 x' に 1（係数が -1 で終わる場合もあるが，そのときは -1）を入れ，ならなかった方の変数 y'' に 0 を入れると，方程式を**必ず（！）**成り立たせることができます。不定でない方程式と同様，解を**半ば機械的に（！ここが重要）**見つけられるというんです。ここから元の x，y に「戻す」作業がありますし，その際 x' と y'' の整数値に対して x，y が必ず整数になるのかという疑問は残りますが，どう置き換えたかを振り返りながら実際にやってみると，

$y''=0 \iff 2x'+y'=0$

$x'=1$ を代入すると $\boxed{2}+\boxed{y'}=0 \quad \therefore \quad y'=-2$

代入されるのは必ず整数↑　↑他方の変数の係数が常に 1 なのがミソ！

$x'=1 \iff x+y'=1$

$y'=-2$ を代入して　$x-2=1 \quad \therefore \quad x=3$ ←置き換えた逆順に元の式に戻す

$y'=-2 \iff 4x+y=-2$ ←あとは y だけ

$x=3$ を代入して　$12+y=-2 \quad \therefore \quad y=-14$ ←y も求まった！ここで完了

この過程で分数が出てくることはないことも確かめられます。そして，この方程式の整数解の 1 つを $x=3$，$y=-14$ と求めることができます。

しかし，この方法の問題点として，変数の置き換えが次々と行われるため，ちょっと複雑な方程式になると，答案が煩雑になってしまうことがあります。そこで，「文字でいちいち置き直すのではなく，**係数の変化だけを追っていき，数を数で置き換えるような操作**をすれば，本質的には同じことをしながら，文字を大量に使わずに済ませることができるのではないか？」という発想が生まれます（そう発想した人がいたわけです）。幸い，一度に出てくる文字は 2 つずつで，それもいっぺんに両方置き換わるということがありませんから，何とかなりそうです。

【互除法との関連づけと解法の簡略化】

そういう観点から，先ほどの変形の仕方を思い出してみることにしましょう。

↓33 という係数はやや大きい　↓括弧内を置き換える

$\boxed{33}x+7y=(\boxed{7}\times 4+5)x+7y=5x+\boxed{7}(4x+y)=5x+7\boxed{y'}$

↑そこで 7 を作り出し ↑新たに 7 でくくる

見ると，33 を 7 で割った商と余りを求め，置き換えない変数の係数は「余り」に変わっています。これでも思いつかなければ同じ操作を繰り返せということでしたが，すると，また割り算の商と余りが出てきて，どんどん繰り返していくと，（元の係数が互いに素であれば）どちらかの係数がいつか 1 になります。実はこの部分が，**ユークリッドの互除法を用いて 33 と 7 の最大公約数 1 を求める計算と同じ**なんです。

a と b の最大公約数を［a，b］で表すと，

$33x+7y=(7\times 4+5)x+7y=5x+7(4x+y)=5x+7y'$ より $y=y'-4x$

に対して

$33=7\times 4+5$ より $5=33-7\times 4$

が対応するような形になります。そして，後の計算をしていくと，$x=3$，$y'=-2$ が「上がって」きますから，

$y=-2-4\times3=-14$ より $33x+7y=1$ の解の 1 つは　$x=3$，$y=-14$

に対して↓今 5 があるが，元の方程式の係数は 33 だったので，5 は消去したい↓そこで

$5\times3+7\times(-2)=1$ と $5=33-7\times4$ より　←互除法の式を 5 について解く！

$(33-7\times4)\times3+7\times(-2)=1 \iff 33\times3+7\times(-4\times3-2)=1$（これで納得？）

↑5 の部分を置き換える　$\iff 33\times3+7\times(-14)=1$

33 と 7 が出てくるので，今度は↑7 の部分をひとまとめにする

が得られ，最後の式は $x=3$，$y=-14$ が与方程式の解の 1 つであることを示しています。実際の答案では，新しい係数を何にすれば良いか求めながら，求めるごとに新しい係数を古い係数に戻すための式を同時に作りつつ，先へ進んでいくことになります。数ばかりが並ぶ答案になり，だからこそ，**消す数と残す数を混乱しないよう至極丁寧に**書かなければなりませんから，いきなりやろうとすると「ギョギョッ！？」となるのですが，元になる発想を思い出しながら，出てくる式をステップごとに追って見ていく所を丁寧に指導し，**まずは答案の意図するところが理解できるように**もっていくことから始めるべきです。

【模範解答】

ユークリッドの互除法を用いると，

$33=7\times4+5 \iff 5=33-7\times4$ …①

$7=5\times1+2 \iff 2=7-5\times1$ …②

$5=2\times2+1 \iff 1=5-2\times2$ …③

よって［33，7］＝［5，7］＝［5，2］＝［1，2］＝1 より，与方程式は整数解をもつ。

まず明らかに　$1\times1+2\times0=1$ …④　↑互い違いに係数が変わるので，左右

④に③を代入して　$(5-2\times2)\times1+2\times0=1$　どちらが 1 になるか把握しておくとよい

$\iff 5\times1+2\times(-2\times1+0)=1 \iff 5\times1+2\times(-2)=1$ …⑤

⑤に②を代入して　$5\times1+(7-5\times1)\times(-2)=1$

$\iff 5\times\{1+(-1)\times(-2)\}+7\times(-2)=1 \iff 5\times3+7\times(-2)=1$ …⑥

同様に，⑥に①を代入して整理すると　$33\times3+7\times(-14)=1$

これは，$x=3$，$y=-14$ が与方程式 $33x+7y=1$ を満たすことを示している。

したがって，与方程式の整数解の 1 つは　$x=3$，$y=-14$　…［答］

次に，この答案を自分で書けるようにもっていくわけですが，そのときに注意したいことは，文字を置き換えて解いていくやり方において，次々置き換わる方程式の係数にあたる部分と，文字の部分（文字に値を代入している部分）を区別して書くことです。例えば⑤から⑥を作るステップで言えば，「**5 と 2 のうち，2 をなくしたい**わけだから，2 を別の数どうしの計算で置き換える。そのために使う式は②で，そうすると 7 が出てくるから，今度は **7 を 1 ヶ所にまとめ，次に 5 を消す準備をする**」という流れを把握しましょう。

重要問題解説「ユークリッド互除法と不定方程式の整数解」 '11 6/3 加筆

【問題２】

【問題１】の結果を用いて，$33x+7y=4$ の整数解をすべて求めよ。

【前問との関連について】

まず与方程式の解を１つ求めるわけですが，左辺が同じで右辺が１である方程式の整数解を【問題１】で求めたのでした。今回も同じやり方で求めることができます。ユークリッドの互除法で［33，7］＝1 を得たあと，右辺を１でなく４，つまり $1\times 4+2\times 0=4$ にして始めれば良いのです。が，これだけだと【問題１】と同じ手順を踏まなくてはなりません。ここでは【問題１】の「結果」を使いなさいと言っているので，次のようにします。

【模範解答】

【問題１】の結果から，$33x+7y=1$ の解の１つは $x=3$，$y=-14$ であるから，

$$33\times 3+7\times(-14)=1$$

この両辺を４倍すると　$33\times 12+7\times(-56)=4$　　←1 組の解を求めるなら４倍するだけ

これは，$x=12$，$y=-56$ が与方程式の解の１つであることを示している。

次に，$33x+7y=4$，$33\times 12+7\times(-56)=4$ の辺々をひいて

$$33(x-12)+7(y+56)=0$$

$$\Leftrightarrow\quad 33(x-12)=-7(y+56)\quad\cdots ⑦$$

なぜ⑦のような式を作るかということも，一般の高校生には理解しがたいと思います。そこで強調したいのが「イコールの意味」です。ここでは，両辺が同じ値になるということよりも，それ以前に**両辺の数が同じ集合に属し，同じ性質を持つ**（引き継ぐ）ということに着目します。まず，$x-12$ は整数ですから，左辺は 33 の倍数とわかります。すると，右辺 $-7(y+56)$ も，左辺とイコールで結ばれている以上，33 の倍数でなくてはならなくなります（**！ここが重要**）。ここで，7 と 33 は互いに素ですから，この条件を満たすためには，つまりは残った $y+56$ が 33 の倍数でなくてはならなくなります。

同様に考えると，右辺は７の倍数だから，左辺の $x-12$ が７の倍数でなくてはなりません。合わせると，左辺，右辺はともに 33 と７の公倍数，つまり 33×7 の倍数でなくてはならないとわかります。そこで，左辺と右辺が等しくなる値を $33\times 7\times k$ とおいて，k に整数値を入れていくことによって，すべての場合が尽くせます。**これ以外の値になることはあり得ません**。

【模範解答の続き】

⑦において，33 と７は互いに素であるから，両辺を比較すると $x-12$ は７の倍数，$y+56$ は 33 の倍数であり，（左辺）＝（右辺）$=33\times 7\times k$（k は整数）とおけば，

$x-12=7k$，$y+56=-33k$　　←「－」が付くことに注意！

$\therefore\quad x=7k+12$，$y=-33k-56$　（k は整数）　$\cdots$［答］

イコールで結んだあとにすぐ k の式が出てくる部分が分かりづらいのですが，そこを少しでも解きほぐしてやることで，答案の流れを理解させたいと思います。

あと，k にいろいろな整数値が入ったときに，x と y が常に整数になるかどうかを確認する必要も本当はあるのですが，今回に限っては $x-12$ の x の係数，$y+56$ の y の係数がともに 1 ですから，x，y をそれぞれ k の式で表したときに「はじかれる」k の値はなく，かつすべての x，y が表せることになります。細かいことも熱心に考えてくれる生徒には，そのあたりの話もうまく補って理解を深めてもらい，整数問題の奥深さを味わってもらいたいものです。

【おわりに】

本資料では，新課程高校数学Ａの要注意問題となりうる，「ユークリッドの互除法と不定方程式の整数解」について解説しました。高校生がどうこう以前に，我々指導者にとっても未知の内容が多いため，何よりもまず我々が恐れてしまいがちなのですが，その不安な気持ちは，どこかで授業を受ける者にも伝わってしまうと思います。指導する側が最初から恐れていて，果たして理解してもらえるでしょうか。不安解消のためには，やはり周到な準備しかないのですが，筆者も少ない経験の中でその難しさを痛感しています。

一定レベル以上の高校数学の問題には，何故その解法になるのかがなかなか説明しにくいものが多いのですが，その「何故？」の部分を抜かしていきなり「こういうやり方だから」と押しつけることは，指導者として極力避けなければなりません。特に今回扱った問題のように，**思考の過程が完成した答案の中に見えづらいもの**については，そういう印象が余計に強くなりますから，細心の注意が必要になると思います。

その観点から，本問の答案はどう書けば良いものか，事前に何冊かの書物を当たったのですが，もともと一般の高校生向けに書かれているもの自体が少なく，答案の書き方としても（いや，その解法自体も？）洗練されていないものが多かったため，これと思えるものにはほとんど出会えませんでした。そこで，「**これから出てくるであろう主に予備校系の参考書で，本問がどう解説されるか**」を念頭に置きながら自分なりの解説を試み，自身が同じ問題を授業で扱うとしたらどこを強調し，どういう話題を絡めて解説するだろうかと自問自答しました。

筆者は，「参考書の模範解答（&解説）は，その参考書の対象読者となる高校生・受験生が試験前日の夜中の 3 時に読んで，独力で理解できなくてはならない」と考えていて，日頃からこれを参考書を見るときのひとつの目安に考えているのですが，こと本問に関しては，その基準をクリアできる解答を作るのはなかなか難しいと感じました。特に【問題１】は相当に理解しがたい内容を含みますし，【問題２】も前問とは少し違った切り口が必要になり，かなりの曲者です。が，それだけに，しっかり解説しようとすれば，他分野にも通ずる様々な内容に絡められる可能性も秘めていますから，ピンチをチャンスに変え，生徒個々人により異なる様々なつまずきポイントを拾うきっかけにもしたいところです。

【補足】

ここまでの内容を 4 月末に書いたのち，新課程版の検定教科書（サンプル）の中で，答案の煩雑さをどう回避しているか，注意して見てみることにしたところ，以下のように，互除法を使った部分をはっきりさせながら，方程式の係数をあえて文字 a，b で表し，変数の置き換え（x と y の式を y' で置き換え，さらに x'，y'' を導入するなど）は使わずに a と b の式を次々に作っていく書き方を目にしました。教科書では，この解法に行きつくプロセスまでは書かれていませんが，模範解答自体は，**数を数で置き換えていくだけの答案に比べて「答案の前の行にさかのぼって戻していく」処理が少なく**なっており，ずいぶん読みやすくなっています。筆者も，様々な答案を見比べるうちに，これが現時点で考えうるベストの書き方ではないかなと思っていました。要するに，答案を書きながら，下の行で出てきたものが上の行で何と書かれていたかを探すとき，基本的には 1 つ前の行を見れば事足りるようになっているので，他の答案に比べて理解しやすく，真似して書くこともしやすいのでは，ということです。

【参考】実教出版版 検定教科書「数学Ａ」P.91 例 3 の解答（方程式は $73x+17y=1$）

$a=73$，$b=17$ とする。← 係数をあえて a，b とおき，下の式に代入！

$73=17\cdot4+5$　より　$\boxed{5}=73-17\cdot4=\boxed{a-4b}$ ← 5 が出てきたらこの式で置き換える

$17=5\cdot3+2$　より　$\boxed{2}=17-\boxed{5}\cdot3=b-3\boxed{(a-4b)}=\boxed{-3a+13b}$ ← 2 が出てきたら・・・

$5=2\cdot2+1$　より　$1=\boxed{5}-\boxed{2}\cdot2=\boxed{(a-4b)}-2\boxed{(-3a+13b)}=7a-30b$

すなわち　$1=73\cdot7+17\cdot(-30)$　a，b を元に戻す！

よって，①（筆者注：$73x+17y=1$）の整数解を 1 組求めると　$x=7$，$y=-30$

これまで見てきたように，不定方程式の整数解を求める問題は，ユークリッド互除法を使う使わないを含めて，様々な答案の書き方がありますが，本質的に同じことをしているのか，それともまったく違う解法なのか，はたまた様々な考え方を臨機応変に使い分けている（別の言い方をすれば，場当たり的に使い倒しているだけ）のか，まずは見極める必要があるでしょう。

教科書的なやり方（書き方）だけでもしっかり教え，完璧にするのが，指導者の最小限の仕事であるのでしょうが、そのうえで，（まあ当たり前のことですが）今回の問題に限らず，数学の得意な生徒には，様々な答案に触れさせて同じ考え方でも様々な表現の仕方があることを意識させ，自分に合った答案の書き方を身につけるところまで指導できれば理想的です。そのための題材としても，整数問題は大変有用であるでしょう。