模範解答を読みこなす～「背理法」編

背理法を用いて解く，次のような証明問題がある。以下に模範解答を示すから，読んでみて欲しい。

【問題】

素数が無限に存在することを証明せよ。

証明　背理法による。

いま，素数が有限個しかないと仮定する。

そのうちの最大のものを p，p 以下のすべての素数の積に 1 を加えた数を N とする。

$N=(2\cdot3\cdot5\cdot\ \ldots\ \cdot p)+1$ で，$N>p$ だから N は合成数のはずである。

しかし N が合成数とすると，N は少なくとも 1 つの素因数をもつことになるが，N はすべての素数 2，3，5，$\cdots$，p のどれで割っても 1 余るから，その素因数は p より大きくなければならない。

これは p が最大の素数であることに反する。つまり，素数が有限個しかないとした仮定が誤りである。

ゆえに素数は無限に存在する。　［証明終］

こういった証明問題を苦手とする生徒さんは多いが，実はその多くは証明を行うこと自体を苦手としているのではなく，数学の証明独特の言い回しに慣れていないだけではないかと筆者は思っている（もちろん，ただ意味も分からず諳んじるような「慣れ」には意味がないわけだが $\cdots$）。やはり，まず大切なのは背理法に親しみを持つことである。

そこで，今から模範解答を日常語で書き直すということを試みる。背理法というのは，実は「漫才」のようなものなので，K さんと Y さんに登場していただき，そういう言い回しでやってもらうことにしよう。おっ？都合よく，素数が無限にあるか，有限個（いくつか）しかないか議論しているようですよ $\cdots$？

<table>
<tr><td>証明　背理法による。</td><td>Y：素数って，絶対無限にあるからな。</td></tr>
<tr><td>いま，素数が有限個しかないと仮定する。</td><td>K：ウソや！幾つかしかあれへんって。</td></tr>
<tr><td>そのうちの最大のものを p，</td><td>Y：そうしたら，その中で最も大きい物が
選べてしまうんやな？p にするぞ p？
K：ええよ？</td></tr>
<tr><td>p 以下のすべての素数の積に 1 を加えた
数を N とする。
$N=(2\cdot3\cdot5\cdot\ \ldots\ \cdot p)+1$ で，
$N>p$ だから</td><td>Y：そうしたら困ってしまうぞ？（略）
こんな N って数が作れてしまうんやぞ？
p に 2 をかけて，3 をかけて，もっといろ
いろかけてしもーて，どんだけデカイ数
作ってもーたんやってきっと言われるわ。</td></tr>
<tr><td>N は合成数のはずである。</td><td>K：そしたらお前，合成数ちゃうんかい？</td></tr>
</table>

しかし N が合成数とすると， N は少なくとも 1 つの素因数を もつことになるが，N はすべての素数 2，3，5，…，p のどれで割っても 1 余るから，その素因数は p より大きく なければならない。	Y：アホかお前！合成数なわけないやろ。 さっきお前が素数は幾つかしかないって 言うから，俺はそいつら全部かけて， さらに 1 を足してしまったんやぞ！ お前さっき一番大きい素数は p やって 言うたやろ！そんで，一体どんな数で 割ったら N が割り切れてくれるねん？ （バシッ！）K：いてっ！
これは p が最大の素数であることに 反する。	Y：やっぱお前を信用した俺がアホやった。 最初にお前の言うことなんか聞かんかっ たら良かったわ。最初に何って言った？
つまり，素数が有限個しかないとした 仮定が誤りである。	K：…？ Y：コラ！忘れてしもーたんか？ 素数は幾つか数えられるしかないって。 そんなふうには考えられへんわ。
ゆえに素数は無限に存在する。	K：そうやったら，どうするんや？ Y：~~いつもの皮膚科の先生に相談するわ。~~ K：もうええわ！

…正しくは「しゃーないから，素数は無限にあるって考えることにするわ」

書いているうちに，本当に漫才のネタみたいになってしまったので，いっそ本人（誰？）を呼んできてこのとおりに演じてもらいたいのだが，数学の答案というのはただそれらしい言葉を使うだけではなく，自分の考えをいかに伝えるか。たとえるなら，自分の考えに反論しようとするもうひとりの自分を用意し，反論を 1 つ 1 つやっつけながら，結論に辿り着くのが本来の姿である。そのために，参考書や問題集の模範答案を読む段階から，今述べたようなことを意識するようにして欲しい。

【雑感】

こういった小芝居的な説明の仕方は，中高一貫校で数学を教えていて常に考えさせられることである。一貫校では平方根を中 2，早ければ中 1 に学んだりするし，そのときに「$\sqrt{2}$ が無理数である証明」に触れてもよいわけである。この証明には背理法を使うが，さらにそこで余力があれば，背理法を使った証明がそれ以外にもいろいろあることにも触れておきたいではないか。そこで，さらに「余談」として上のような証明に触れさせるのもよい。ただ，素材自体は大学受験生でも理解に苦しむほどのレベルだから，生徒さんにこの証明自体を再現させることに重点を置くのではなく，内容自体はいっそ忘れてしまっても，これからの学習に臨む姿勢を植えつけることをむしろ大事にしたいと考える。