

【定点観測レビューとは】（はじめての皆さん向け→【注】）

【調査対象テーマ&書籍】

今回は、12年度からの新課程の数学Aで初めて体系的に扱われる「整数」の中でも「不定方程式の整数解」に注目した。大学入試に整数解の問題が出題されることは今までにもあったが、基本的な計算が出来るかどうかと論理の組み立てが出来るかどうかを見る出題が主で、受験生にとってどこまでを「常識」とするかの線引きは曖昧であった。ところが、教科書で取り扱われるようになったおかげで、ある種の問題に対して半ば機械的な式変形により答えを出すことが、難関大志望者以外の受験生にも求められるようになった。さらに、新課程の数学Aでは、この分野を含む3分野から2分野を選択して取り扱われることになったが、東大・京大では早々と入試での出題範囲に3分野すべてを入れることを明言した。恐らく、今までに出題したような整数問題を今後も出題したいという意図と思われる（指導者側がこれに過剰に反応してしまうのも良くないのだが…）

高校数学で初めて取り扱われる分野ということで、本調査では検定教科書と定番の総合（網羅系）参考書の選題についてまとめる。複数の出版社・グレードの検定教科書における扱いを比較し、白・黄・青の「チャート式」（数研出版）と比較する。また、検定教科書に関しては節末・章末問題に加えて巻末の「課題学習」についても調査の対象とした。

【調査方法】

以下の項目について、必要事項を記録したものを一覧表にまとめる。

* 書名・出版社名

* 問題枠・種別難易・番号：どのような位置づけの問題として収録されているかについて、「例題」「基本例題」「類題」「練習」「難易度2」等その本における収録枠および問題番号を記録。さらに、調査結果（後述）をまとめる際、大きく例題・例題に付属する類題・その他の問題（章末など）に分け、それぞれ赤、黄、白で色分けした。

* 出題パターン：以下のパターンに分け、それが小問の何問めか（単問は○）を記録。さらに小分類に分かれるものについては、解を「1つ」求める問題と「すべて」求める問題を区別するなどして記録する。

－ 基本形：

2元1次不定方程式で、係数（の絶対値：以下では省略）が小さく、1つの解（特殊解）が比較的簡単に見つかるもの。すべての解を生成する論理の組み立て方がメインになるので、解をすべて求めさせる出題が多い。また、導入として方程式に定数項がないものについても扱う必要があるので、紹介されている箇所を探して「右辺0」と記録した。

例 x, y を整数とする。方程式 $5x + 3y = 1$ の解をすべて求めよ。

－ 互除法：

2元1次不定方程式で、係数が大きく特殊解を求めること自体に手間がかかるもの。本調査では、互除法（の逆計算）を用いて特殊解を求めさせることのみを問う出題は「1つ」、そのあと基本形と同じ考えを用いてすべての解を求めさせる出題については「すべて」と記録した。

例 等式 $31x + 22y = 1$ を満たす整数 x, y の組を1つ（／すべて）求めよ。

－ 基本形の応用：

1次不定方程式に帰着できる文章題。典型は「剰余」に関する問題。剰余に関する問題の中では、剰余が3つ与えられて元の整数を求める問題などがやや高度であり、これらは「剰余難」と記録した。他に、所定の金額をちょうど使い切って2種類の品物を買う方法を問うものなどが見受けられ、これらは「文章題」と記録した。

例 6で割ると1余り、11で割ると5余る自然数のうち、3桁で最小のものを求めよ。

例 50円切手 x 枚と80円切手 y 枚を使い、郵送料740円をちょうど払う方法をすべて求めよ。

－ 因数分解：

2次式（まれに3次～4次式）の因数分解を用いて x, y の値の組合せを絞り込んで解くタイプの出題。 $\sqrt{\quad}$ を含む式が整数になる n の値を求めさせる出題もあり、これらは「平方根」と記録した。また、与方程式が分数の和などで表されていても、分母を払うことにより直ちに因数分解しやすい形に帰着できるものは「分母払」と記録し、分数の和（後述）の欄にも「△」を記録した。

例 方程式 $xy + 3x + y = 2$ の整数解を求めよ。

例 $\sqrt{n^2 + 15}$ が自然数となるような自然数 n をすべて求めよ。

例 等式 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2}$ を満たす自然数 x, y の組をすべて求めよ。

－ 分数の和：

分数の和で表される方程式の中で、概ね文字が3つ以上のもの。主に範囲・大小関係を用いて条件を絞り込み、場合分けしてすべての解を求めさせる。

－ その他・発展：

文字が3つ以上ある、式が2つ以上あるものなど発展的なもの。何らかの大小関係や偶奇性などに着目し条件を絞り込むことを主眼とした出題が多い。方程式の左辺を平方完成し、2乗の和で表すものは「2乗の和」と記録した。その他、定型パターンに近いものでは、因数分解できない2次式を1つの文字に関する2次方程式とみなし、その実数解条件などから条件を絞り込むものなども見受けられた。

* 出典：出題大学名が明記されているものについてのみ記録。

* 備考：出題内容の概略を記録。別解、特徴ある出題なども含む。

【調査結果】※ 参照

→ <http://green.ap.teacup.com/reviewer/mizuno/html/12seisukai.pdf>

【考察・所感】

○検定教科書での扱いについて

啓林館では、不定方程式の整数解を体系的に扱おうとしており、2つの節にまたがって基本形→因数分解系（節末で分母を払うタイプの分数の和も）→基本形の応用の順に扱っている。互除法を用いた解法に関しては、互除法自体の解説のあとで副次的な内容として扱うが、今後センター試験などで互除法がらみの解法が頻出すれば、章立てが変わってくる可能性がある。

逆に、数研出版での扱いは大変ハッキリしていて、互除法を用いた解法はレベルを問わず定着まで必須の内容という位置付けである。対して、因数分解系の扱いは検定教科書本文の中では極めて低く、巻末の「課題学習」として収録されているのみである。ただし、章末問題になると平方根にからめて一部因数分解を用いる問題が扱われているほか、「チャート式」シリーズでは、平方根の問題が互除法を扱う前の節の節末問題として収録されている。このことから、因数分解による解法は「高校生が受験までのどこかの時期で（いつの間にか）身につけなくてはならない常識」として認識されていることが伺える。しかし、学力の高い一部の層を除いた普通の高校生にしてみると、こういった扱いは苦になると思う。整数問題のこういった扱いは、この新課程を機に排除してもらいたい。

今回の調査で、最も系統立てて整数問題を扱っていると感じたのは実教出版の検定教科書である。互除法をメインとしながらも、節末前の例・例題で啓林館と同じような扱い方で因数分解系を大きく扱っている。特に「式のたすきがけ」は、数学Ⅰの序盤だけでは演習量が不足するので、整数問題にからめてここで再び演習させるのも良い考えであると感じた。巻末の課題学習で、オイラーの多面体定理やいわゆる「油分け算」など総合学習などとも絡めやすい題材を扱っているのもポイントである。採用することはなくても、指導者用の参考資料の1つとして持っておきたい。反面、これだけ死角なく問題を収録されてしまうと、解法の並びが多少「しつこく」も感じられるので、授業時間数が少ない場合など、短時間で最小限の内容を押さえたい場合は取捨選択が必要となる。

このように、検定教科書の段階で、扱いには大きな差がみられた。ただし、今後は、これまでと同様、現場の評価の高いもの（もしくは売れ筋のもの）の内容に向かって「収束」していくと思われる。

○その他の教材での扱いについて

検定教科書とその他の教材（参考書・傍用問題集）との最も大きな違いの1つに、分数の和の形で与えられた方程式で、1文字の範囲やその他の大小関係などから条件を絞り込

んでいくタイプの扱いがあげられる。検定教科書での扱いが少ないのには、純粹に解法が高度であるという以外に、このタイプの問題を解くために本来必要な知識である「分数式」「不等式の証明」が数学Ⅱにならないと扱われないからという建前上の理由もあると思われる。が、多くの傍用問題集には本文中に「例題」「重要例題」という枠があり、そのような問題もここでなら扱いやすい。実際、分数の和タイプ（大小関係による絞り込みが必要な）もほとんどの傍用問題集で「例題」として扱われているので、指導の際、教科書の本文で基本事項を押さえたあと、余力の範囲でこれらの問題を活用して入試レベルへの橋渡しをしたいところである。

○指導上の留意点

今回、教科書で扱われることで、大学入試レベルまで見据えた整数分野の目標到達点が明らかになった。数学Aは2分野選択のところを、授業時間を十分に確保せずに3分野とも扱おう（扱ったことにしよう）とすると、教科書本文レベルとその定着だけで精一杯になってしまう恐れもある。今まで教科書で扱われなかった分野でもあるし、学年間の引き継ぎ（特に傍用問題集の例題レベルをどう扱ったか）はきっちり行わなければならない。ここが疎かになると、結局は演習授業にしわ寄せがいくことになるからである。

また、新課程では数学Ⅰの内容も大幅に増え、さらに「課題学習」も入ってくることになる。そこで、場合によっては「何がなんでもすべての問題を授業で扱う」という考えを改め、基礎・基本を重視した無理のない指導に切り替えることが必要になるかも知れない。この点に関しては、11年8月にも話させていただいたとおりである。

また、特に整数分野の場合、教育的な効果を考えると、純粹に「難しい」問題を扱うよりも、論証をしっかりとさせることの方が重要かも知れないが、そもそも論証をしっかりとするには表現力（書く力、伝える力、もしくは力でなくモチベーション）が伴わなければならない。生徒の精神的な成長を待つ必要もあるから、何が何でも高1の間に（程度の高い中高一貫校であれば中3などの然るべき時期に）扱うことは必ずしも得策ではない。教科書学習時の理解も、生徒によって分かれてしまうのではないか。

そこで、今回の調査には含められなかったが「実用数学検定」（数検）が役に立つであろう。数検では「証明技能」「整理技能」という観点から複数の級で整数問題が出題されていて、しかも題材は同じでも級によってハードルが上がる（例えば下の級では答えだけ書けばよいが上の級では論証まで求められるなど）といったように出題にも工夫が見られる。各学年・学力層に整数分野に関する理解がどの程度求められているかという基準にもなるし、継続して受けることにより反復練習のきっかけにできるだろう。同時に、指導者としては、新課程に対応した数研の対策本が出揃い次第、目を通すようにしたい。

さらに、反復練習をしっかりとするという点では、新課程に合わせた「白チャート」（数研出版）の改訂内容にヒントがある。調査結果を見ると、基本形、互除法、基本形の応用の問題が数サイクルにわたり収録されているが（問題数だけを見ると黄チャートよりはる

かに多い），収録ページには「ここで整理」「定期試験対策演習コーナー」といったように異なったタイトルがついている。実際の授業でも，このレベルの問題はまずは授業内容の確認小テストに出題され，理解度が低い場合はここで解説を加え，それでも心配であれば今度は定期試験前に，重要な問題を幾つかピックアップして作った「対策プリント」を課題にしたりして底上げを図ることになると思う。こういった扱い・指導は従来からかなり広く行われているはずだが，そこでの課題の出し方のサンプルとして参考にされたい。

○入試レベルの問題を扱ううえでの留意点

これと比較して，教科書本文レベルは確認程度に終え，入試に近いレベルを手厚く扱っている「青チャート」（数研出版）を見ると，違いがよりはっきりする。青チャートでは，互除法が必要なものとそうでないものを1つの例題枠で扱い，教科書本文～節末までのレベルをカバーするのにかかる例題数を少なくしている。さらに，今回の改訂（正確には現課程の「青チャートワイド」）から「演習例題」という問題枠を設け，教科書節末までのレベルと関連発展問題を本の中ではっきり分けるようになったことにも注意されたい。演習例題になると本調査では「各種発展」に分類したタイプが主になるが，余力があれば，演習例題を中心に学習していくことによって難関大の入試レベルも見据えた内容をバランス良く身につけられるはずである。

もし，このレベルの内容を他書で補うとすれば，互除法を用いた解法を除けば現課程版の受験問題集が参考になる。「Z会数学基礎問題集 チェック&リピート」（Z会出版）および「大学への数学 1対1対応の演習」（東京出版）では数学Ⅰの方程式・不等式の関連事項として整数解の問題を扱っており，特に1対1は例題の選題バランスが良い。少ない問題数で様々なタイプ・解法に触れたいなら，ややレベルの高い問題も混ざるが「短期集中 インテンシブ10」（Z会出版）なども有用であろう。ただし，現課程版の参考書，問題集から問題をとる場合は，解説の仕方，模範解答の作り方に注意が必要である。

さらに，これから実施される新課程での大学入試において整数問題がどのように出題されるかによっては，参考書・問題集に収録される問題のタイプが動くことも考えられる。大学側が意図した正答率にならない問題は徐々に淘汰されていくものと思われるが，データが蓄積されるまでには相応の時間を要するため，しばらくは混乱が続くのではないか。

【まとめ】

本調査では，現時点で入手できた新課程版の検定教科書，傍用問題集，参考書の主なものについて選題分析を行い，教材間での重要問題の扱いの差を指摘しつつ，指導上の留意点について考察した。

このテーマに限らず，入試問題で出題されるテーマが1つあったときに，それを学習者のどの段階で見せ，どの段階で定着させて，どの段階以降で「常識」扱いすべきであるかということに尽きる。今後とも同様の調査を続けていき，数学教育界に微力ながら貢献し

ていきたい。

==== 【注】

【定点観測レビューとは】

ある1つの出題テーマに注目し、それが複数の教材においてどう扱われているかを記録し、またそれらを比較することによって、教材間の網羅性・レベル・傾向の相違に関するある種の見通しを得るもの。と同時に、教材を作成する際の選題や配列の仕方、さらには各教材における妥当性、有用性に関して、客観的なデータをもとに議論するきっかけとする。