

【定点観測レビューとは】（はじめての皆さん向け→【注】）

【調査対象テーマ&書籍】

今回は、調査対象として「数列」より「漸化式の発展パターン」、特にほとんどの教科書では本文中で扱っていないものに注目した。どのようなパターンを例題として扱うか、また問題に基本、発展、応用などどういったタイトルをつけるかは本によって差があり、各参考書がどういったレベルをターゲットに作られているかを知る目安となるほか、理系の受験生は将来的に「極限」分野を学ぶときも漸化式で表された数列の極限を扱うから、そちらとの接続を考えるうえでも重要な分野といえる。

本調査では、総合（網羅系）参考書の中でも定番とされるものに関する調査をメインとする。調査できる冊数が限られる中で、初学者向けは「白チャート」（数研出版）、中級者向けは「シグマトライ」（文英堂）と「黄チャート」（数研出版）、上級者向けは「青チャート」（数研出版）と、極力幅広いレベルの本を扱うよう心がけた。

さらに、参考のために問題集「チェック&リポート」（Z会出版）、演習書「大学への数学 1対1対応の演習」（東京出版）、さらに検定教科書は節末問題・章末問題のほかコラムまで含めて同様の調査を行い、教材の種類による比較も試みた。

【調査方法】

以下の項目について、必要事項を記録したものを一覧表にまとめる。

- * 書名・出版社名
- * 問題枠・種別難易・番号：どのような位置づけの問題として収録されているかについて、「例題」「基本例題」「類題」「練習」「難易度2」等その本における収録枠および問題番号を記録。さらに、調査結果（後述）をまとめる際、大きく例題・例題に付属する類題・その他の問題（章末など）に分け、それぞれ赤、黄、白で色分けした。
- * 出題パターン：以下のパターンに分け、それが小問の何問めか（単問は○）を記録。

一 基本（記録省略）：

いわゆる中級以上の検定教科書の本文中で扱われている、等差型、等比型、階差型（ $a_{n+1}=a_n+f(n)$ ）、1次式型（ $a_{n+1}=pa_n+q$ ：階差を用いる解法、特性方程式 $\alpha=pa+q$ を用いる解法があり、最終的には後者の解法に誘導される）の各パターン。

一 階差（記録省略）：

両辺の n 、 $n+1$ 等を1つずらした漸化式と辺々差をとり、階差数列で置き換えることにより基本パターンに帰着できるもの。

一 逆数：

$\frac{1}{a_n}$ と置き換えるか、漸化式の両辺の逆数をとることにより、ただちに基本パターン

(等差型か1次式型)に帰着できるもの。

－乗除：

両辺に n の式をかけるか、両辺を n の式で割るかして、さらに適当な置き換えを用いて基本パターンに帰着するもの。一般項が $a_{n+1} = pa_n + q^n$ で表されるものは、両辺を q^{n+1} で割って $\frac{a_n}{q^n}$ で置き換えるなどの方法で基本パターンに帰着させる。一般

項が $na_{n+1} = (n+1)a_n$ 等で表されるものは、両辺を $n(n+1)$ で割って、 $\frac{a_n}{n}$ で置き換えるのが代表的な解法。この2つが特に代表的であり、中堅以上の私大などの入試では誘導なしで出題されることもある。

－3項基本：

隣接3項間の漸化式 $pa_{n+2} + qa_{n+1} + ra_n = 0$ で、 $p+q+r=0$ のもの、階差数列で置き換えると基本パターン（等比型）に帰着される。

－3項一般：

隣接3項間の漸化式 $pa_{n+2} + qa_{n+1} + ra_n = 0$ で表されるもの一般。特性方程式 $pt^2 + qt + r = 0$ の解を用いて、基本パターン（重解の場合は割り算等）に帰着させる。

－フィボナッチ数列：

3項一般の中で、とくに一般項が $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ で表されるもの。有名なので、コラムや文章題の題材によく使われる。

－連立基本：

連立漸化式 $a_{n+1} = pa_n + qb_n$ 、 $b_{n+1} = ra_n + sb_n$ で表されるもののうち、辺々の和と差をとれば適当な置き換えにより基本パターンに帰着できるもの。

－連立一般：

連立漸化式 $a_{n+1} = pa_n + qb_n$ 、 $b_{n+1} = ra_n + sb_n$ で表されるもの一般。加減法を用い、さらに適当な置き換えにより基本パターンに帰着させる。

－対数：

一般項が $a_{n+1} = pa_n^q$ で表されるもの。両辺の対数をとって、適当に置き換えて基本パターンに帰着させる。

－各種誘導：

その他特殊なパターンで、置き換えの指示など解法の誘導がつくもの。

初項から第 n 項までの和 S_n を含む漸化式のほか、 $a_{n+1} + f(n+1) = a_n + f(n)$ に帰着させるもの、 $a_{n+1} = \frac{pa_n + q}{ra_n + s}$ 型など。

－文章題（備考欄に記録）：

題意より漸化式を立てて解くもの。平面を直線で区切ったときの交点の個数、1段ず

つか2段ずつ階段を昇るときの昇り方が何通りあるかなど。ただし、題意より得られる漸化式がそれ自体「発展的な」形をしているものはほとんどない。

－ 確率分野との融合（記録省略）：

確率分野との融合問題も重要であるが、今回は記録しない。

－ 予想して証明（記録省略）：

誘導に沿って一般項を予想し、その予想が正しいことを数学的帰納法で証明するもの。

* 出典：出題大学名が明記されているものについてのみ記録。

* 備考：特に各種誘導パターンについて概略を記録。

【調査結果】※参照

→ <http://green.ap.teacup.com/reviewer/mizuno/html/zenkashiki09.pdf>

【考察・所感】

初学者向け参考書の「白チャート」（数研出版）は、各例題が取り組みやすく整理されている印象を受けた。初学者～中級者向けの「シグマトライ」（文英堂）においても同様の傾向が見られるが、この2冊に共通しているのは、検定教科書の本文か節末問題レベルで扱っているものと、誘導が必要なもの・目新しく感じられるものを明確に分けている点である。「白」は前者と後者の間に節末問題が挟まっているし（収録場所）、「シグマ～」も多く傍用問題集で扱われている幾つかのパターンを除いて「発展例題」とタイトルがつく（例題の種別）。こういった配慮により、予備知識の少ない者が取り組む場合にも、注意が必要であるものがどれかすぐに分かるようになっている。特にこのレベルの本の場合、使用者のレベル、用途等によっては当該部分をまるごとパスしても構わないわけだが、そういった使い方をする際に使用者が感じる負担感、いわば「中途半端になってしまった感」をいくぶん和らげる効果も期待できるのではないかと。

次に中級者向けとされる「黄チャート」（数研出版）であるが、こちらはやや煩雑に感じる。割り当てられている例題枠の数が「白」の4に比べても倍以上の10もあり、しかもこの本で学習する生徒さんには少々キツそうなものが、「基本例題・難易度3」に幾つも分類されている。また、隣接3項間の漸化式を扱うのに「重要例題」の枠を2つ費やしており、それ自体は悪くないのだが、本調査における「基本」、つまり特性方程式の解による変形を行わずとも両辺に何かを足せばただちに階差型に帰着できるパターンへの導入に、別の誘導がついた問題（同志社大）を使う意図が理解しかねる。こういう扱いがあるとなれば、この内容を1つの例題枠に圧縮し、まず本調査でいう「一般」の場合を導入し、その中で係数の組合せを限定すれば簡単に解ける「基本」がある、というもっていき方をする場合のみであろう。例題の選題においては、単にその例題でどんな事項や解法を扱う

かということだけでなく、隣のページや前後の節で類似テーマがどういう扱いをされているかにまで注意を払って欲しい。あと、確率分野や行列分野との融合等で重要である連立型が、最後の例題枠になっている点にも疑問を感じる。「あくまで隣接2項間の漸化式をすべて扱ってから連立3項間・連立を扱う」というコンセプトは理解できなくもないが、そこまで学習が進む前に息切れしてしまう危険性が高くなる。個人的には、当該テーマに限らず、応用範囲の広いものはなるべく節の中ほどまで、具体的には「基本例題・難易度4」程度の扱いで入れておいて欲しい。

同じ中級者向けでも「シグマトライ」（文英堂）は至ってオーソドックスな構成である。この「シグマトライ」に合わせて本調査表の欄を作ったわけではないが、おおむね易しいものから難しいものへ少しずつステップアップしていく構成であることが表から見てとれる。対数型を扱っていない点が唯一の不満か。例題として扱いにくいのなら節末で扱い、さらに「数学Ⅱの対数を学んでから挑戦しよう」などの注釈をつけてはどうか。

その「節末問題」であるが、こちらはもう少しひねったパターンを扱っても良かったかも知れない。この本の節末問題は、最初のほうが幾つか例題ページの反復問題になっており、確かにそういう箇所も必要かと思われるが（特に初学者～中級者レベルでは、1つ1つのパターン練習をしている時は解けても、それらが他と混ざると解けないことが多いため）、それをどの枠組でやるかは考える余地がある。例えば同じ出版社でも「理解しやすい」になると、やや高いレベルの問題にチャレンジする「練習問題（A・B）」の前に基礎の反復用の「テスト直線要点チェック」を置くというふうに明確に分ける構成になっているので、この形式をとりいれてはどうか。

中級者～上級者向けの参考書といえやはり「青チャート」が定番ということになるのだが、本調査の結果も、これまで筆者がこの本に対して抱いていた印象どおりであった。とにかく、内容が多岐にわたりすぎ、かつ配列も非常に煩雑になっているので、指導者の助けなしに使いこなすのは難しい。

一応、筆者がこの本の理想的な使い方として提案しているのは、まず「基本例題」レベルの問題は（教科書や傍用問題集で学習しておいて）サッと流す程度にし、節末以降の「重要例題」に重点を置きたいところなのだが、「基本例題」でも後半になると和 S_n を扱ったものが多く並び、この時点で多くの生徒さんはただ答えを見ながら解くか、解法を覚えるだけの学習になってしまうだろう。「演習問題A」も、配列的にもう少し基本例題に即したものになっていればよいが、このままでは取り組みづらく、スキップせざるを得ない。「重要例題」も、確かに代表的と思われるパターンをひとつとおり扱ってはいるが、その間に特殊なものが挟まり、間延びした感じがする。連立漸化式が扱われているページまで、この順で解き進めていける生徒さんの姿が正直イメージできない。

市販の問題集で、教科書～入試基礎レベルとやや実践（実戦）的内容をつなぐものとしては「チェック&リピート」（Z会出版）を筆者は以前から薦めており、特に例題演習を

「青」でなく「黄」や「シグマトライ」等で行った生徒さんが知識を補いながら入試独特の「ひねった」問題に慣れるのに良いことがお分かりいただけると思う。基礎の反復からチャレンジ問題的なものまで頻出・重要事項がひととおり入っており、問題数もある程度絞られている。ただ、似たテーマの問題がひと固まりになってはいるが、反復用の類題がこの本の中にある問題とそうでないものがあるため、必要に応じて手持ちの参考書に戻って基本事項を確認しながら進むべき。欲を言えば、「対数」のパターンは、学習の進め方によってはここまでまったく触れずに来る可能性もあるわけなので、問題を2題収録しておいて欲しかった。

「チェック～」が単処理の問題を中心に収録しているのに対し、上級者向けの演習書である「1対1対応の演習」（東京出版）は入試基礎レベルの解法を習得済みであることを前提とし、さらに発展的な問題を中心に扱っている。1つの例題枠で実質2問を扱い、その1問が基礎の反復寄り、1問が発展寄りとなっているものが多いから内容的には濃くなるが、系統立てて整理されていて、重要なパターンが強調されているから、いたずらに取り組みづらい印象は受けにくい。また、「1対1」に取り組む場合、例題だけでなく下の「演習題」までやるべきかも気になるところだが、さすがにいきなり例題と並行してやっていくのはしんどいにせよ、概ね8割以上の例題の解法を頭に入れてからなら無理なく取り組めるのではないだろうか。

さて、到達点的にはあまり変わらない「青」と「1対1」ではあるが、教科書と並行して使う場面が多い前者と、教科書学習を一旦終えたあとに使う場面が多い後方で、異なる点を1つ見つけた。数学Ⅱ「対数」分野との融合問題が出てくるのが、前者は遅く後者では早いのである（同じ傾向は「黄チャート」と「チェック&リポート」を比較しても見られる）。教科書学習の段階ではまず数学Bとしての「数列」の内容をしっかり押さえた方がいいのだが、対数をとる発想自体はそんなに目新しいものではなく、いちどこかで触れておきさえすれば、演習の段階に入ったときに自然と出てくるようになる類のもの、ということであろう。

このテーマに限らず、入試問題で出題されるテーマが1つあったときに、それを学習者のどの段階で見せ、どの段階で定着させて、どの段階以降で「常識」扱いすべきであるかということに尽きる。今回の調査では、前回までの調査よりもやや広い視野を持ちつつ、客観性を保ったデータ集めが出来たと自負している。今後とも同様の調査を続けていき、数学教育界に微力ながら貢献していきたい。

==== 【注】

【定点観測レビューとは】

ある1つの出題テーマに注目し、それが複数の教材においてどう扱われているかを記録し、またそれらを比較することによって、教材間の網羅性・レベル・傾向の相違に関する種の見通しを得るもの。と同時に、教材を作成する際の選題や配列の仕方、さらには各教材においての妥当性、有用性に関して、客観的なデータをもとに議論するきっかけとする。

=====